C^∞ 関数とボレルの定理

若林　誠一郎

1　解析学とは？

$\boxed{\text{微積分学の基本定理をその基礎として用いる数学の分野}}$
（私見）

微積分学の基本定理：
$f(x)$ が連続ならば，$a \in \boldsymbol{R}$ を１つ固定して

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$$

別表現：$F(x)$ を $f(x)$ の１つの不定積分とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \tag{1}$$

第３の形：$g(x)$ が微分可能で導関数が連続のとき

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,dt \tag{2}$$

部分積分（第４の形）：$a < b$，f は連続，g は微分可能で導関数が連続のとき，$F(x)$ を $f(x)$ の１つの不定積分とすると

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \tag{3}$$

(3) で $g(x) \equiv 1, b = x$ とおくと，(1) を得る．また，(3) で $F(x) \equiv 1$ (そのとき，$f(x) \equiv 0$), $b = x$ とおくと，(2) を得る．

物理学で用いられる Gauss，Stokes の定理は，本質的には部分積分と同じ．

$\Longrightarrow$ 物理学は解析学か？

2　Taylor 展開と Borel の定理

$f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ ($f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で何回でも微分可能) とする．部分積分を用いて

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + x\int_0^1 1\cdot f'(\theta x)\,d\theta \\ &= f(0) + x\Big\{[(\theta-1)\cdot f'(\theta x)]_{\theta=0}^{\theta=1} + x\int_0^1 (1-\theta) f''(\theta x)\,d\theta\Big\} \\ &= f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{1!}\int_0^1 (1-\theta) f''(\theta x)\,d\theta = \cdots \\ &= f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) \\ &\quad + \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)\,d\theta \end{aligned}$$

Taylor の定理 (Taylor 展開)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)\,d\theta$$

を得る．

解析関数

$f(x)$ が $x=0$ で解析的

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists r > 0$ s.t. "$|x| < r \Rightarrow R_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$)"

("$|x| < r \Rightarrow R_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$)" を満たす正数 r が存在する)

$\Longleftrightarrow$

$\exists r > 0$, $\exists C > 0$, $\exists A > 0$ s.t.

"$|x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \le CA^{-n} n!$　($n = 0, 1, \cdots$)"

$x \in \boldsymbol{R}$ に対して，右辺の級数が収束して

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x\,(= \exp[x]) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$|x| < 1$ に対して，右辺の級数が収束して

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

複素数 x に対して，右辺によって $\sin x, \cos x, e^x$ を定義できる．そのとき

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x \quad \text{（Euler の関係式）}$$

が成立する．

$f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} \exp\Big[-\dfrac{1}{x}\Big] & (\ x > 0) \\ 0 & (\ x \le 0) \end{cases}$

によって定義する．そのとき，$f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ かつ $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, \cdots$) であることを示せる．よって

$$f(x) \sim 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots = 0 \quad \text{（Taylor 展開）}$$

$f(x) \not\equiv 0$ より $f(x)$ は解析関数でない．

<u>**Taylor 展開の意味**</u>：$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，n を固定して

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\Big| / x^n \to 0 \quad (\ x \to 0)$$

これを

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad (\ x \to 0)$$

とかく（漸近級数）．

<u>**Thm (Borel)**</u>　$\{c_n\}_{n=0,1,\cdots}$：与えられた実数列 (or 複素数列) とする．そのとき，

$$\exists f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R}) \ \text{ s.t. } \ f^{(n)}(0) = c_n \quad (\ n = 0, 1, \cdots)$$

<u>**略証**</u>：$\mu(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ を，$0 \le \mu(x) \le 1$ かつ

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \le 1/2) \\ 0 & (\ |x| \ge 1) \end{cases}$$

を満たすようにとる（後の注意参照）．

数列 $\{a_n\}$ を $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ かつ $a_n \to \infty$ ($n \to \infty$) を満たすように選ぶ（後でさらに条件が付く）.

$$\boxed{f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x)} \quad \text{とおく.}$$

・**Well-defined ?**

$x = 0$ のときは $f(0) = c_0$

$x \neq 0$ とする．そのとき， $\exists N$ (x に依存) s.t. "$n \geq N \Rightarrow a_n|x| \geq 1$"
故に $n \geq N \Rightarrow \mu(a_n x) = 0$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x) \quad (\text{有限和})$$

・ $\boldsymbol{f \in C^\infty(R)}$ **?** （微分と $\sum_{n=0}^{\infty}$ を交換できるか？）

$\{a_n\}$ を

$$a_n \geq \max\{a_{n-1}, |c_n|^{2/n}\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

ととる． N を自然数とし，１つ固定する． $A_N := \max_{k \leq N,\, x \in R} |\mu^{(k)}(x)|$ とおく． $n \geq 2N$ に対して，Leibniz の定理により

$$\frac{d^N}{dx^N}\Big(\frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x)\Big) = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{c_n}{(n-k)!} x^{n-k} a_n^{N-k} \mu^{(N-k)}(a_n x)$$

$\mu^{(N-k)}(a_n x) \neq 0 \Rightarrow |x| \leq 1/a_n$ に注意して

$$\begin{aligned} \Big|\frac{d^N}{dx^N}\Big(\frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x)\Big)\Big| &\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{N!n!}{k!(N-k)!(n-k)!} \frac{|c_n| a_n^{N-n}}{n!} A_N \\ &\leq N! A_N \frac{|c_n| a_n^{-n/2}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = N! A_N \frac{2^n}{n!} \end{aligned}$$

$\sum_{n=2N}^{\infty} N! A_N \frac{2^n}{n!} \leq N! A_N e^2 < \infty$ より（「項別微分した級数が一様収束すれば，元の級数は微分可能で，その導関数は項別微分した級数に等しい」（２年の解析で習う)), $f(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ かつ

$$f^{(N)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^N}{dx^N}\Big(\frac{c_n}{n!} x^n \mu(a_n x)\Big)$$

$\mu(0) = 1,\ \mu^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) より， $f^{(N)}(0) = c_N$ □

注意：例えば，$\mu(x)$ を次のようにとればよい．

$$p(x) = \begin{cases} \exp\Big[-\dfrac{1}{1-x^2}\Big] & (\ |x| < 1) \\ 0 & (\ |x| \geq 1) \end{cases}$$

とおくと， $p(x) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$．さらに

$$q(x) = \begin{cases} 0 & (\ x \leq -1) \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} p(t)\,dt & (\ x > -1) \end{cases}$$

とおく．そのとき，

$$q(x) = \begin{cases} 0 & (\ x \leq -1) \\ a & (\ x \geq 1), \end{cases} \qquad a = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt > 0$$

よって，$r(x) = q(x)q(6-x)/a^2$ として

$$\mu(x) = r(4x+3)$$

ととればよい．

3　擬微分作用素

（常）微分作用素 $P(x,D)$：

$$P(x,D)u(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D^{m-j} u(x)$$

ここで，$D^j u(x) = (-i)^j \dfrac{d^j}{dx^j} u(x)$, $i = \sqrt{-1}$ である．

$$P(x,\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\xi^{m-j} \quad (\ \xi\ \text{の多項式})$$

を，$P(x,D)$ のシンボルという．ξ の多項式であるところを，x, ξ の C^∞ 関数に一般化，$p(x,\xi) \in C^\infty$ かつ，例えば

$$(4) \qquad \Big|\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial \xi^k} p(x,\xi)\Big| \leq C_{j,k}(1+|\xi|)^{m-k} \quad (\ j,k = 0,1,\cdots)$$

を満たすシンボルに対して，これに対応する作用素 $p(x,D)$ を考える．

$p(x,D)$ を如何に定義するか？ そのために，(4) の制限が必要になる．$p(x,D)$ を擬微分作用素と呼ぶ．

Fourier 変換

$$\mathcal{F}[u](\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x)\, dx$$

(例えば，$u \in C^\infty$，$u(x) = 0$ ($|x| > \exists R$))，そのとき，

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\, d\xi \quad \text{：Fourier 逆変換}$$

微分と積分が交換できるとすると，

$$Du(x)\Big(= -i\frac{d}{dx}u(x)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\xi\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

これは，$Du(x) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \xi\hat{u}(\xi)$ を意味する．よって

$$P(x,D)u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}P(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

このことより，擬微分作用素 $p(x,D)$ を

$$p(x,D)u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

と定義する．

積公式

$$a(x)D^m(b(x)D^n u(x)) = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}a(x)(D^k b(x))D^{n+m-k}u(x)$$

これをシンボルでかくと，

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}a(x)\xi^{m-k}(D^k b(x))\xi^n = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}(a(x)\xi^m)\cdot D_x^k(b(x)\xi^n)$$

$p(x,D)q(x,D) \longleftrightarrow p(x,\xi)\circ q(x,\xi)$ と表せば，

$$p(x,\xi)\circ q(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}p(x,\xi)\Big)\Big(D_x^k q(x,\xi)\Big) \quad (|\xi| \to \infty)$$

(と予想される．右辺の級数は一般に収束しない)．Borel の定理の証明法を適用．$\{a_n\}$：$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$, $a_n \to \infty$ ($n \to \infty$) として，

$$\boxed{r(x,\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p(x,\xi)\Big)\Big(D_x^k q(x,\xi)\Big)\mu(a_n/|\xi|)}$$

とおく．そのとき，

$$(5) \qquad \Big|\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial \xi^k}\{p(x,\xi)\circ q(x,\xi) - r(x,\xi)\}\Big| \le C_{j,k,N}(1+|\xi|)^{-N}$$

$$(\ j,k,N = 0,1,2,\cdots)$$

$$(6) \qquad (p(x,D)q(x,D) - r(x,D))u(x) \in C^\infty$$

を満たす.

<u>(6) **の直感的説明**</u>： $a(x,\xi) = \xi^{-N}$ ($|\xi| \ge 1$) とすると，例えば、$u(x)$ が連続で，十分大なる R に対して $u(x) = 0$ ($|x| > R$) ならば，$a(x,D)u(x)$ は N 回微分可能で，$D^N a(x,D)u(x)$ ($\approx u(x)$) は連続．したがって，(5) より (6) が成り立つものと推測される.

<u>**例**</u> $\quad p(x,D) = D^2 + a(x)$

$(*) \quad p(x,D)u(x) = f(x)$

を考える．もし $q(x,\xi)$： $p(x,\xi)\circ q(x,\xi) \sim 1$ ($|\xi| \to \infty$) ならば

$$p(x,D)(q(x,D)f(x)) - f(x) \in C^\infty$$

故に，$(*)$ が C^∞ を法 (誤差) として解ける．$q(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x,\xi)$ の形で求めよう.

$$p(x,\xi)\circ q(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p(x,\xi)\Big)\Big(D_x^k q(x,\xi)\Big)$$

$$\sim \sum_{j=0}^{\infty}[(\xi^2 + a(x))q_j(x,\xi) + 2\xi D_x q_j(x,\xi) + D_x^2 q_j(x,\xi)] \sim 1$$

より

$$(\xi^2 + a(x))q_0(x,\xi) = 1$$
$$(\xi^2 + a(x))q_1(x,\xi) + 2\xi D_x q_0(x,\xi) = 0$$
$$(\xi^2 + a(x))q_2(x,\xi) + 2\xi D_x q_1(x,\xi) + D_x^2 q_0(x,\xi) = 0$$
$$\cdots$$
$$(\xi^2 + a(x))q_n(x,\xi) + 2\xi D_x q_{n-1}(x,\xi) + D_x^2 q_{n-2}(x,\xi) = 0$$
$$\cdots$$

を満たすように，$q_0(x,\xi)$, $q_1(x,\xi)$, $\cdots$ を決めればよい．すなわち，

$$
\begin{aligned}
q_0(x,\xi) &= \frac{1}{\xi^2+a(x)} \\
q_1(x,\xi) &= -\frac{1}{\xi^2+a(x)} 2\xi D_x q_0(x,\xi) = \frac{2\xi Da(x)}{(\xi^2+a(x))^3} \\
q_2(x,\xi) &= \ \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

$\{a_n\}$ を適当にとって，

$$
\boxed{q(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x,\xi)\mu(a_n/|\xi|)}
$$

とおけばよい．以上，考え方の概略を示したが，数学的には各ステップを厳密に証明・正当化する必要がある．

擬微分作用素は，一変数の場合よりは多変数関数の場合に特に有用で，今日では，擬微分作用素が偏微分方程式論のための必要不可欠な道具になっている。