円周率 π

$$\text{“円周率 } \pi\text{”} = \text{“円周の長さ”} \div \text{“直径の長さ”}$$

疑問:

“円周の長さ” と “直径の長さ” の比の値は常に一定であるのか?

すなわち，この比の値は “直径の長さ” や “円の中心の位置” を変えても変化しないのか？

1．曲線の長さの公式

$$C\text{:}\quad x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\ a \leqq t \leqq b)$$

φ，ψ が $[a, b]$ で有界変動であるとき，C の長さ l は有限であった．

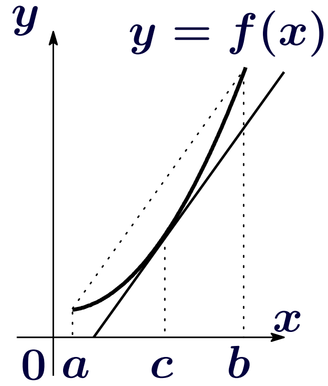
$\varphi, \psi \in C^1([a, b])$（$[a, b]$ で微分可能で導関数が連続）と仮定する．そのとき，$|\varphi'(t)|, |\psi'(t)| \leqq M$（$t \in [a, b]$）を満たす $M \geqq 0$ が存在することと，次の平均値の定理を使えば，φ，ψ が $[a, b]$ で有界変動であることが分かる．

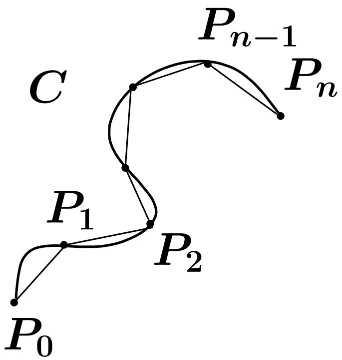
平均値の定理:

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で，(a,b) で微分可能であるとき，$c \in (a,b)$ を

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$$

を満たすように選べる.





Δ: $[a,b]$ の分割

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

$$P_j := (\varphi(t_j), \psi(t_j)) \quad (0 \leqq j \leqq n)$$

$$l(\Delta) \equiv \text{“折線} P_0P_1P_2\cdots P_n \text{の長さ”}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))^2 + (\psi(t_j) - \psi(t_{j-1}))^2}$$

平均値の定理より

$$\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \varphi'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \qquad (\ 1 \leqq j \leqq n)$$

ここで ξ_j は $t_{j-1} < \xi_j < t_j$ を満たす.

分割 Δ が十分に細かいとき, $\varphi'(t)$ の連続性より

$$\varphi'(\xi_j) \doteqdot \varphi'(t_j)$$

故に

$$l(\Delta) \doteqdot \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\varphi'(t_j)^2 + \psi'(t_j)^2}\,(t_j - t_{j-1})$$

$$\xrightarrow{\Delta\ \text{を細かく}} \quad \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

故に

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

ここで，分割 Δ' が分割 Δ の細分ならば，$l(\Delta) \leqq l(\Delta')$ であることを用いた．

$f \in C^1([a,b])$

C:　$y = f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$) のとき

(*i.e.*, C:　$x = t$, $y = f(t)$ ($a \leqq t \leqq b$))

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

2．合成関数の微分・置換積分の公式

$g(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で微分可能

$F(x)$ は $[c, d]$ で微分可能，$c \leqq g(t) \leqq d$ ($\alpha \leqq t \leqq \beta$)

と仮定．そのとき，合成関数 $F(g(t))$ も $[\alpha, \beta]$ で微分可能で

(2) $$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t)$$ (合成関数の微分法)

($\because$ $k := g(t+h) - g(t)$ とおいて $h \to 0$ のとき $k \to 0$

形式的に

$$\frac{F(g(t+h)) - F(g(t))}{h}$$
$$= \frac{F(g(t)+k) - F(g(t))}{k} \cdot \frac{k}{h} \xrightarrow{h \to 0} F'(g(t))g'(t)$$)

さらに，$g'(t)$ が連続，$f(x) := F'(x)$ が連続であるとする．微積分学の基本定理より

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(g(t))\,dt$$

であるので，$a = g(\alpha)$，$b = g(\beta)$ ととって上と（2）を用いて，

(3) $$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(置換積分)

3．π

平面上の中心 $A(a,b)$，半径 $r(>0)$ の円 C の方程式は

Pythagoras の定理より

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

これより，C は次のようにも表せる:

$$\begin{cases} y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}, & a-r \leqq x \leqq a+r \\ & (\ y \geqq b\text{のとき}) \\ y=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}, & a-r \leqq x \leqq a+r \\ & (\ y \leqq b\text{のとき}) \end{cases}$$

同様に

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{r^2 - (y-b)^2}, & b - r \leqq y \leqq b + r \\ & (\ x \geqq a \text{のとき}) \\ x = a - \sqrt{r^2 - (y-b)^2}, & b - r \leqq y \leqq b + r \\ & (\ x \leqq a \text{のとき}) \end{cases}$$

合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx}\left(b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right) = \frac{\pm(a-x)}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$$

である.

($\because \dfrac{d}{dx}b = 0$ は明らか．(2) で $F(x) = \sqrt{x}$,

$g(t) = r^2 - (t-a)^2$ ととって,

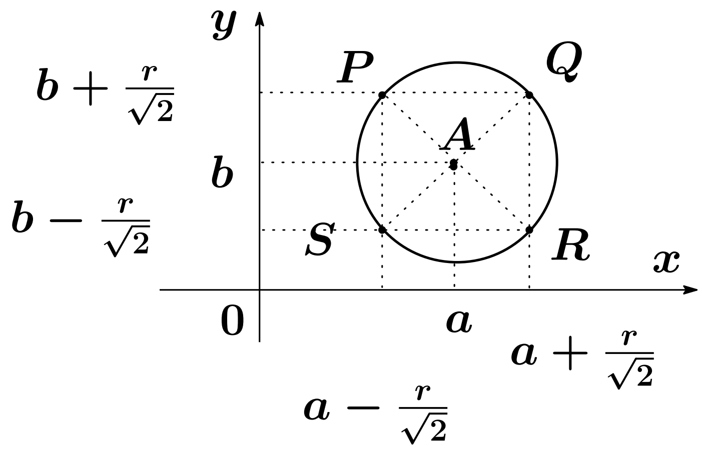
$F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(t) = 2(a-t)$ より

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{1}{2\sqrt{r^2-(t-a)^2}} \cdot 2(a-t)$$

t を x で置き換えて

$$\frac{d}{dx}\sqrt{r^2-(x-a)^2} = \frac{a-x}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}$$

ここで $\dfrac{d}{dx}x^{\gamma} = \gamma x^{\gamma-1}$ を用いた)



例えば弧PQ:　$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$

$$\left(a - \frac{r}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq a + \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$ より

“弧PQの長さ”

$$= \int_{a-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{a+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}}\, dx$$

同様に

“弧RSの長さ”

$$= \int_{a-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{a+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2}}\,dx$$

“弧PSの長さ” = “弧QRの長さ”

$$= \int_{b-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{b+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\frac{(y-b)^2}{r^2-(y-b)^2}}\,dy$$

故に

$$\text{“円周の長さ”} = 2\int_{a-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{a+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2}}\,dx + 2\int_{b-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{b+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\frac{(y-b)^2}{r^2-(y-b)^2}}\,dy$$

置換積分の公式（3）で

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}}, \quad g(t) = a + rt$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ととって

$$f(g(t)) = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad g'(t) = r$$

より

$$\int_{a-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{a+\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}}\, dx = r \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

同様にして

$$\text{“円周の長さ”} = 4r\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

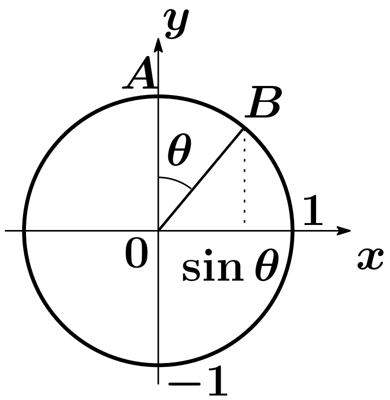
故に

$$\pi = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \left(= 4\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)$$

以上により π は中心の座標 (a,b) や半径 r によらず一定.

4. Arctan と Gregory 級数

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$: 弧度法



"弧 AB の長さ" $= \theta = \displaystyle\int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

置換積分の公式 (3) で

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \tan\theta$$

ととって

$$f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} = \sqrt{1+t^2}$$

$$g'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

($\because$ 合成関数の微分法（2）より $\frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\frac{d}{dt}\frac{k(t)}{h(t)} = \frac{h(t)k'(t) - h'(t)k(t)}{h(t)^2}$$ (商の微分公式)

を用いる)

$$g(\alpha) = 0,$$

$$g(\beta) = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \sin\theta$$

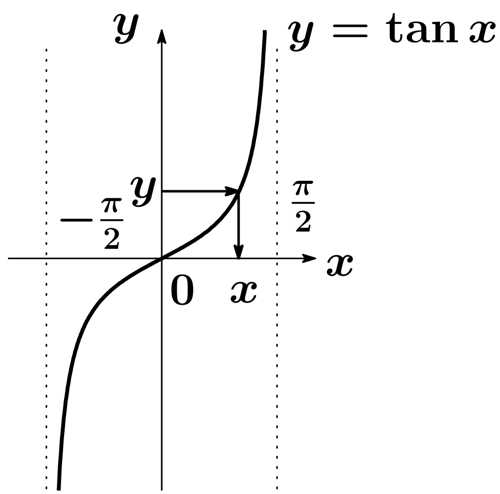
故に

$$\theta = \int_0^{\tan\theta} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_0^{\tan\theta} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

特に $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ととって

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $y = \tan x$ を考える．



$y = \tan x$ は単調増加で，値を $(-\infty, \infty)$ にとるので，y を与えれば

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y = \tan x$$

を満たす x が唯一つ定まる．この x を y の関数とみて

$$x = \mathrm{Arctan}\, y$$

とかく ($\mathrm{Arctan}\, y$ を $\mathrm{Tan}^{-1}\, y$ ともかき，$\tan$ の逆関数という)．

故に

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\, y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\, dt}$$

等比級数の公式

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (\ r \neq 1)$$

より，$r = -t^2$ とおいて

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

故に

$$\mathrm{Arctan}\, y = \int_0^y (1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n})\, dt + R_n(y)$$

$$= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + R_n(y)$$

$$R_n(y) = \int_0^y \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

特に $|y| \leqq 1$ に対して

$$|R_n(y)| = \left| \int_0^y \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leqq \left| \int_0^y t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|y|^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\leqq \frac{1}{2n+3} \to 0 \quad (\ n \to \infty)$$

y を x に書き換えて

(4) $$\left|\operatorname{Arctan} x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

特に，$|x| \leqq 1$ のとき $n \to \infty$ として，無限級数は収束して

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

(Gregory 級数)

特に $x = 1$ ととって

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$ (Gregory, Leibniz)

$x = 1/\sqrt{3}$ ととって

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right)$$ (Sharp)

Machinの公式: 1706年

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)$$

は以下のように導かれる.

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha, \beta, (\alpha+\beta) < \dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$p = \tan\alpha$, $q = \tan\beta$ とおいて

$$\mathrm{Arctan}\, p + \mathrm{Arctan}\, q = \alpha + \beta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{p+q}{1-pq}\right)$$

$p=q=\frac{1}{5}$ として

$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}=\mathrm{Arctan}\,\frac{2\cdot 5^{-1}}{1-5^{-2}}=\mathrm{Arctan}\,\frac{5}{12}$$

$p=q=\frac{5}{12}$ として

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}=2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{5}{12}=\mathrm{Arctan}\,\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}$$

$$=\mathrm{Arctan}\,\frac{120}{119}$$

故に

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}=\mathrm{Arctan}\,\frac{120}{119}+\mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right)$$

$$=\mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\cdot 239}}=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4} \qquad \blacksquare$$

レポート問題 2:

Machin の公式を用いて，0.00001 より小さい項を無視して π の近似値を求めよ((4)を用いれば誤差も評価できる).

- 2011年10月 パソコンで近藤茂・Alexander Yee がπを10兆桁計算(次の公式を用いた(?)).

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{\sqrt{C}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(A+Bn)}{(3n)!(n!)^3 C^n}$$

$$A = 13,591,409, \ B = 545,140,134, \ C = 640,320^3$$

(Chudnovsky の公式)

- http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/indexj.html の教材資料の「円周率の計算」及び「eもπも超越数」参照