平面曲線

1．平面曲線の定義

$a < b$

区間

$(a, b) := \{x |\ a < x < b\}$: **開区間**

$[a, b] := \{x |\ a \leqq x \leqq b\}$: **閉区間**

$(a, b] := \{x |\ a < x \leqq b\}$: **半開区間**

$\mathrm{R} = (-\infty, \infty)$: **実数全体のつくる集合，数直線**

$\mathrm{R}^2 = \{(x, y) |\ x, y \in \mathrm{R}\}$: **平面**

$f\colon\ [a,b] \ni x \mapsto f(x) \in \mathrm{R}$

閉区間 $[a,b]$ 上定義された関数

$c \in [a,b]$

- f が $x = c$ で連続

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$f(x) \to f(c)$ ($x \to c,\ x \in [a,b]$)

($f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$)

- f が $[a,b]$ で連続

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

f が各 $c \in [a,b]$ で連続

定義: ・C が R^2 内の(連続)曲線

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

連続関数 φ, ψ: $[a,b] \to \mathrm{R}$ を適当に選んで

$C = \{(\varphi(t), \psi(t)) |\ a \leqq t \leqq b\}$ (軌跡)

とかける．このとき

C: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ ($a \leqq t \leqq b$)

とも表す．さらに

・C が閉曲線

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$ ("始点" = "終点")

• C が Jordan(ジョルダン) 曲線

$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$$

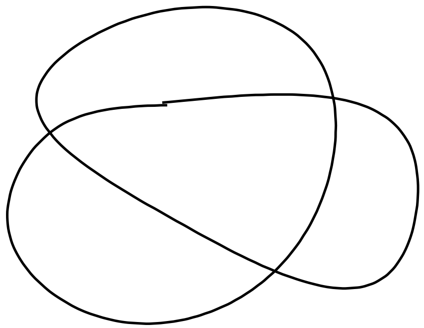
$$\left.\begin{array}{l} a \leqq t_1 < t_2 \leqq b \\ (\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2)) \end{array}\right) \Rightarrow t_1 = a,\ t_2 = b$$

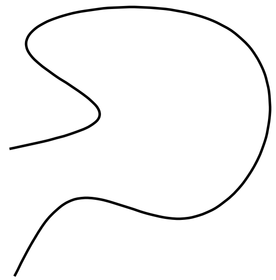
($t = a$ を出発して途中で ($a < t < b$ のとき)，自分自身と交わらず，かつ $t = b$ のとき自分自身と交われば，始点と終点が一致する)

• C が Jordan 閉曲線

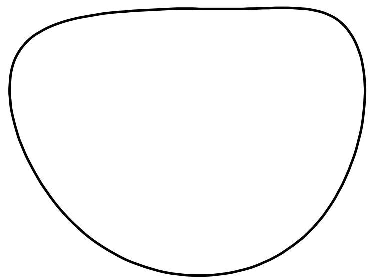
$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$$

C が閉曲線かつ Jordan 曲線

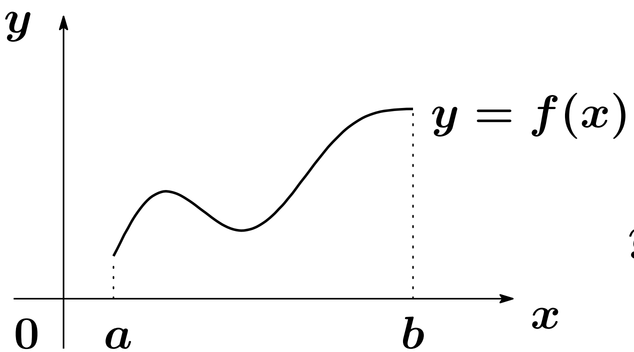




Jordan 曲線



Jordan 閉曲線



$y = f(x)$ のグラフ

注）(i) f が $[a,b]$ で連続で

$$C: \quad x=t,\ y=f(t)\ (\ a \leqq t \leqq b)$$

のとき

$$C: \quad y=f(x)\ (\ a \leqq x \leqq b)$$

ともかく．このとき C は $y=f(x)$ のグラフ．

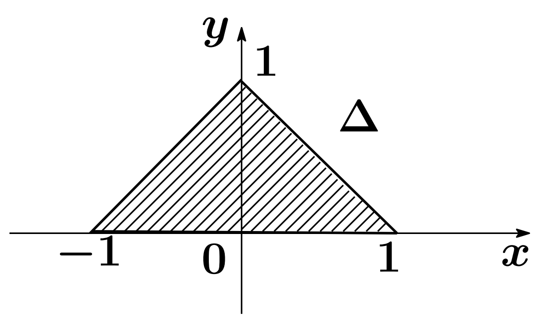
(ii) ここで与えた曲線の定義では，面積をもつ曲線も存在する！

$\longrightarrow$ Peano (ペアノ) 曲線

2. Peano 曲線 (Knopp による定義)

$$\boldsymbol{\Delta} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 |\ y \geqq 0,\ |x| + y \leqq 1\}$$

写像 $[0,1] \ni t \mapsto P(t) \equiv (\varphi(t), \psi(t)) \in \boldsymbol{\Delta}$ を次のように定義する.



$t \in (0,1]$ に対して t を次のように一意に表せる:

$a_n = 0$ or 1, $\quad a_n = 1$ なる n は無限個, かつ

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

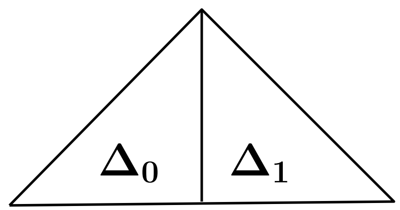
このとき，2進小数を用いて

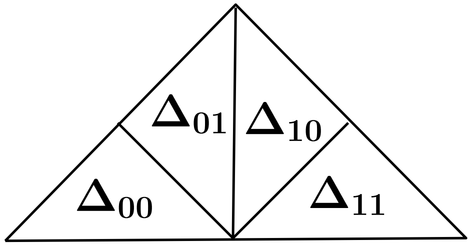
$$t = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$$

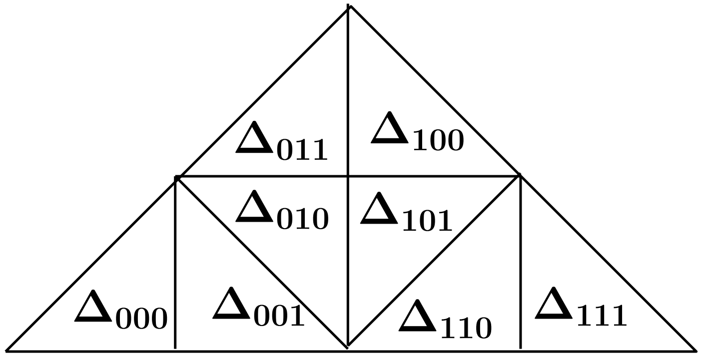
例えば

$$\frac{3}{4} = 0.11 = 0.1011\cdots, \quad 1 = 0.111\cdots$$

Δ を2等分して Δ_0，Δ_1 に分ける．さらに Δ を4等分して，Δ_{00}，Δ_{01}，Δ_{10}，Δ_{11} に分ける．以下繰り返す．







但し，番号付けは $\Delta_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ の添え字を２進小数$0.a_1 a_2 \cdots a_n$ とみて，小さいものから順に三角形の一辺を共有するように番号を付け，さらに

$$\Delta_{a_1} \supset \Delta_{a_1 a_2} \supset \Delta_{a_1 a_2 a_3} \supset \cdots \supset \Delta_{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

となるようにする．このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \{P\}\text{: 一点からなる集合}$$

すなわち，すべての自然数 n に対して $\Delta_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ に含まれる Δ の点が存在し，しかもこの性質をもつ Δ の点は唯一つに決まる.

各 $t \in [0, 1]$ に対して，$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, $a_n = 0$ or 1 とかいて

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \{P(t)\}$$

によって Δ の点 $P(t)$ が唯一つ定まる.

注) (i) $t = 0$ のとき

$$P(0) = (-1, 0) \ (\subset \Delta_0 \cap \Delta_{00} \cap \Delta_{000} \cap \cdots)$$

(ii) $t \in (0,1]$ のとき，$a_n = 1$ なる n が無限個あるように $\{a_n\}$ を定めたが，このようにしなくても同じ $P(t)$ が定まる．

例えば $t = \frac{3}{4} = 0.11 = 0.1011\cdots$ のとき

$$\begin{aligned}\left\{P\left(\frac{3}{4}\right)\right\} &= \boldsymbol{\Delta}_1 \cap \boldsymbol{\Delta}_{10} \cap \boldsymbol{\Delta}_{101} \cap \boldsymbol{\Delta}_{1011} \cap \cdots = \{(0,0)\} \\ &= \boldsymbol{\Delta}_1 \cap \boldsymbol{\Delta}_{11} \cap \boldsymbol{\Delta}_{110} \cap \boldsymbol{\Delta}_{1100} \cap \cdots\end{aligned}$$

(iii) $P(0) = (-1,0)$，$P(1) = (1,0)$，$P\left(\frac{1}{2}\right) = (0,1)$，

$P\left(\frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{3}{4}\right) = (0,0)$，$P\left(\frac{1}{8}\right) = P\left(\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，

$P\left(\frac{5}{8}\right) = P\left(\frac{7}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$P\left(\frac{5}{16}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$，$\cdots$

以上のように $P(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ を定めると，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ は $[0, 1]$ で連続で，

任意の $P \in \Delta$ に対して $t \in [0, 1]$ を適当に選んで，

$P = P(t)$ とできる (写像は全射であるという)

よって Δ 全体が曲線となり，Peano 曲線が定義された。

レポート問題 1:

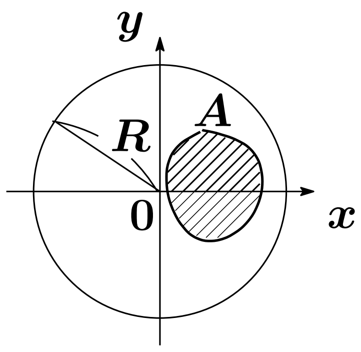
$P\left(\frac{1}{16}\right)$，$P\left(\frac{3}{16}\right)$ を求めよ.

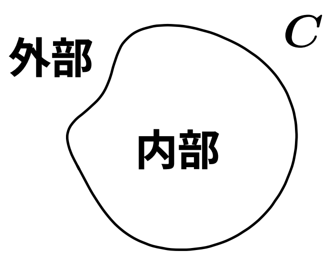
3. Jordan の曲線定理

R^2 の集合(平面図形) A が有界

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$R > 0$ を十分大にとれば，A が原点を中心とする半径 R の円に含まれる.

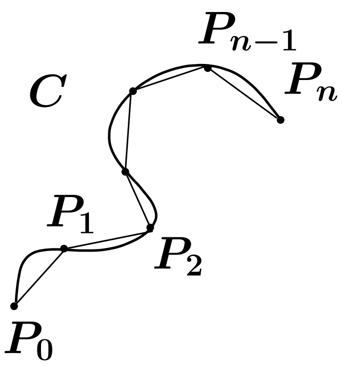




<u>Jordan の曲線定理</u>: Jordan 閉曲線 C は R^2 (平面)を2つの部分に分け，一方は有界，他方は非有界(有界でない). 有界な部分を C の内部，非有界な部分を C の外部と呼ぶ.

4．曲線の長さ

C:　$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($a \leqq t \leqq b$)



Δ: $[a, b]$ の分割

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ (分点)

$P_j := (\varphi(t_j), \psi(t_j))$ ($0 \leqq j \leqq n$)

$l(\Delta) :=$ "折線 $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ の長さ"

定義: 曲線 C の長さ有限(C が長さをもつ)

$$\overset{\text{定義}}{\iff}$$

ある $M \geqq 0$ が存在して，任意の $[a,b]$ の分割 Δ に対して

$$l(\Delta) \leqq M$$

$A \subset \mathrm{R}$ (*i.e.*, A は実数からなる集合)

・A が上(下)に有界

$$\overset{\text{定義}}{\iff}$$

実数 M が存在して 「$a \in A \Longrightarrow a \leqq (\geqq) M$ を満たす」

このとき，M を A の上(下)界と呼ぶ.

実数の性質: A が空集合でなく，上に有界ならば，

$$\text{“}A \text{ の上限”} \equiv \text{“}A \text{ の上界の最小値”}$$

が存在する．すなわち，次の性質をもつ $M \in \mathrm{R}$ が定まる:

(i) M は A の上界

(ii) $M' < M \implies M'$ は A の上界でない

i.e.，任意の $M' < M$ に対して，$a \in A$ を $a > M'$ を満たすように選べる

注) (i) A の上限を $\sup A$ で表す．

(ii) “A の下界の最大値” を A の下限といい，$\inf A$ で表す．

定義: ・曲線 C の長さが有限であるとき，C の長さ l は

$$l := \sup\{l(\Delta) \mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}$$
$$\left(= \sup_{\Delta} l(\Delta) \text{ と略記}\right)$$

によって定義される．

$f(x)$: 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数

Δ: $[a,b]$ の分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \text{ (分点)}$$

$$V(f;\Delta)(\equiv V_{[a,b]}(f;\Delta)) := \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

定義: ・f が $[a,b]$ において有界変動

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

ある $M \geqq 0$ が存在して，任意の $[a,b]$ の分割 Δ に対して

$$V_{[a,b]}(f;\Delta) \leqq M$$

このとき，

$$V(f)(\equiv V_{[a,b]}(f))$$
$$:= \sup\{V_{[a,b]}(f;\Delta) \mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}$$

：$[a,b]$ における f の全変動

$\alpha \in \mathrm{R}$ に対して

$$\alpha^+ := \max\{\alpha, 0\}, \qquad \alpha^- := \max\{-\alpha, 0\}$$

と定義する．そのとき

(1) $$\alpha = \alpha^+ - \alpha^-, \qquad |\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$$

f が $[a,b]$ において有界変動であるとする．

$$P(f;\Delta)(\equiv P_{[a,b]}(f;\Delta)) := \sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1}))^+$$

$$N(f;\Delta)(\equiv N_{[a,b]}(f;\Delta)) := \sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1}))^-$$

とおいて

$$P(f)(\equiv P_{[a,b]}(f)) := \sup_{\Delta} P(f;\Delta):$$ 正変動

$$N(f)(\equiv N_{[a,b]}(f)) := \sup_{\Delta} N(f;\Delta):$$ 負変動

と定義する．(1) より

$$V(f) = P(f) + N(f),$$

$$f(b) - f(a) = P(f) - N(f)$$

$x \in [a,b]$ に対して

$$g(x) := f(a)^{+} + P_{[a,x]}(f),$$

$$h(x) := f(a)^{-} + N_{[a,x]}(f)$$

とおくと，

$g(x)$，$h(x)$ は $[a,b]$ で単調増加で，$g(x), h(x) \geqq 0$ かつ

$$f(x) = g(x) - h(x),$$

$$|f(a)| + V_{[a,x]}(f) = g(x) + h(x)$$

定理 1: f が $[a,b]$ で有界変動

$$\Longleftrightarrow$$

f が非負の単調増加関数の差で表される

定理 2: 曲線 C の長さ有限

$$\Longleftrightarrow$$

φ，ψ が $[a,b]$ で有界変動

$\because$ Δ: $[a,b]$ の分割

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

$$\begin{aligned}
&\max\{V(\varphi;\Delta), V(\psi;\Delta)\} \\
&\leqq l(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))^2 + (\psi(t_j) - \psi(t_{j-1}))^2} \\
&\leqq V(\varphi;\Delta) + V(\psi;\Delta)
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) 上より

$$V(\varphi;\Delta), V(\psi;\Delta) \leqq \text{“}C \text{ の長さ } l\text{”} (< \infty)$$

よって φ, ψ は $[a,b]$ で有界変動

($\Leftarrow$) 同様に

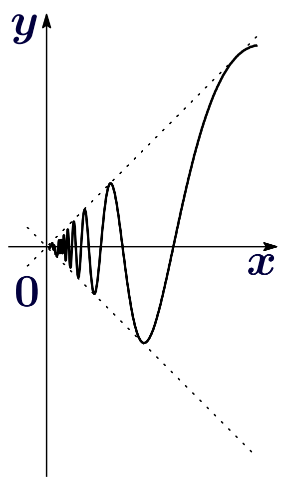
$$l(\Delta) \leqq V(\varphi) + V(\psi) < \infty$$

より C の長さ有限 ■

例

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right) & (\ 0 < x \leqq 1) \\ 0 & (\ x = 0) \end{cases}$$

は $[0, 1]$ で連続だが有界変動でない.



$\because$ Δ: $[0,1]$ の分割

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \frac{1}{n-2} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$$

$$V_{[0,1]}(f;\Delta) = \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-2} + \cdots + \frac{2}{2} + 1$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 \ \to \ \infty \quad (\ n \to \infty)$$

$\Leftarrow$

$$\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k} \right)$$

$$\geqq 1 + \frac{n}{2} \to \infty \qquad (\ n \to \infty)$$ ■