実解析　演習問題

2003.4　若林

I. 集 合

断らない限り、X を集合とし、A、B、$\cdots$ を X の部分集合とする。

- $\mathcal{P}(X) := \{A\colon\ A \subset X\}$：$X$ のべき集合
- $A - B := \{x \in A\colon\ x \notin B\}$：差集合
- $A^c := X - A\ (\ = \{x \in X\colon\ x \notin A\})$：補集合

1. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ とする。

$$(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cup B), \qquad (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cap B)$$

を証明せよ。ここで、$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A_\lambda$ for $\forall\lambda \in \Lambda$,
$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\lambda \in \Lambda$ s.t. $x \in A_\lambda$ である。

2. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ とする。

$$(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda \cup B_\mu),$$
$$(\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda \cap B_\mu)$$

を証明せよ。

3. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ とする。

$$(\textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \qquad (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

を示せ。

4. 集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\cdots}\ (\subset \mathcal{P}(X))$ に対して、$\{A_n\}$ の上極限（集合）$\overline{\lim}\, A_n$ (or $\overline{\lim_n} A_n$, $\limsup A_n, \cdots$) 及び下極限（集合）$\underline{\lim}\, A_n$ (or $\underline{\lim_n} A_n$, $\liminf A_n, \cdots$) を

$$\overline{\lim}\, A_n := \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i), \qquad \underline{\lim}\, A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i)$$

と定義する。$\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$ を示せ。

5. 次を示せ。

(1)　$x \in \overline{\lim}\, A_n \Longleftrightarrow$ “無限個の A_n に x が含まれる（属す）”

(2)　$x \in \underline{\lim}\, A_n \Longleftrightarrow$ “ある番号から先のすべての A_n に x が含まれる”

(3)　$B - (\overline{\lim}\, A_n) = \underline{\lim}(B - A_n), \qquad B - (\underline{\lim}\, A_n) = \overline{\lim}(B - A_n)$

6. $A_n = \begin{cases} A & (n = 3m,\ m = 1, 2, \cdots), \\ B & (n = 3m+1,\ m = 0, 1, 2, \cdots), \\ C & (n = 3m+2,\ m = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$

のとき、$\overline{\lim}\, A_n$, $\underline{\lim}\, A_n$ を計算せよ。

7. $\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n$ のとき、$\{A_n\}$ は収束するといい、$\lim A_n = \overline{\lim}\, A_n$ によって極限（集合）を定義する。次を示せ。

   (1) $A_n \uparrow$ (すなわち、$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$) ならば $\{A_n\}$ は収束し、$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

   (2) $A_n \downarrow$ (すなわち、$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$) ならば $\{A_n\}$ は収束し、$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

8. 次式を証明せよ。

$$\underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n \subset \underline{\lim}(A_n \cup B_n) \subset \overline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n \subset \overline{\lim}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim}\, A_n \cup \overline{\lim}\, B_n$$

9. 写像 $f : X \to Y$ に対して、次を示せ。

   (1) $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$

   (2) $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$

   (3) $f^{-1}(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$

   (4) $f^{-1}(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$

   (5) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$

10. $\chi_A(x)$ によって A の定義関数を表す。すなわち、$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \in X - A) \end{cases}$

次を示せ。

   (1) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ のとき、$\chi_A(x) = \sup_n \chi_{A_n}(x)$ ($x \in X$)

   (2) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ のとき、$\chi_A(x) = \inf_n \chi_{A_n}(x)$ ($x \in X$)

   (3) $A = \overline{\lim}\, A_n$ のとき、$\chi_A(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x)$ ($x \in X$)

   (4) $A = \underline{\lim}\, A_n$ のとき、$\chi_A(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, \chi_{A_n}(x)$ ($x \in X$)

II. 測度空間

- $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) が有限加法族（or 集合体）であるとは、

  (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

  を満たすときをいう。

- $\mathcal{B}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) が完全加法族（or σ 集合体）であるとは、

  (i) $\mathcal{B}$ は有限加法族, (ii) $A_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \cdots$) $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

  を満たすときをいう。このとき、$(X, \mathcal{B})$ を可測空間という。

- $\mathcal{A}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) に対して、$\mathcal{F}(\mathcal{A}), \mathcal{B}(\mathcal{A})$ によってそれぞれ $\mathcal{A}$ の生成する（ $\mathcal{A}$ を含む最小の）有限加法族、完全加法族を表す（問題 2 参）。

- $\mathcal{M}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) が単調族であるとは、

  $A_n \in \mathcal{M},\ A_n \uparrow \text{ or } A_n \downarrow \Longrightarrow \lim A_n \in \mathcal{M}$

  を満たすときをいう。$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して、$\mathcal{A}$ を含む最小の単調族を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ で表す（問題 3 参）。

- $\mathcal{I}_N$ を $\mathbb{R}^N$ の区間 $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_N]$ ($-\infty \le a_j < b_j \le +\infty$) の全体と空集合 $\emptyset$ のつくる集合（族）とする。このとき、$\mathcal{B}(\mathcal{I}_N)$ を $\mathcal{B}_N$ で表し、$\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族という。$\mathcal{B}_N$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ とも表す。$\mathcal{B}_N$ の要素を Borel 集合という。

- $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) を有限加法族とし、$\mathcal{F}$ 上定義された関数 m ($m : \mathcal{F} \ni A \mapsto m(A) \in \overline{\mathbb{R}}$) が有限加法的測度であるとは、

  (i) $0 \le m(A) \le +\infty$ ($A \in \mathcal{F}$), (ii) $m(\emptyset) = 0$

  (iii) $A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

  を満たすときをいう。

- $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。$\mathcal{B}$ 上定義された関数 μ が測度であるとは、

  (i) μ は有限加法的測度,

  (ii) $A_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \cdots$), $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($j \ne k$) $\Longrightarrow \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

  を満たすときをいう。$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間という。さらに $\mu(X) < \infty$ のとき有限測度、また “$\exists X_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \cdots$) s.t. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,\ \mu(X_n) < \infty$” のとき、$\mu$ は σ-有限であるという。

- $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とするとき、$A_n \in \mathcal{B},\ A_n \uparrow$ ならば、$\mu(\lim A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ である。また $A_n \in \mathcal{B},\ A_n \downarrow$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ ならば、$\mu(\lim A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ である。

1. $\mathcal{F}_\lambda$ ($\subset \mathcal{P}(X)$), $\mathcal{B}_\mu$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) をそれぞれ有限加法族、完全加法族とする ($\lambda \in \Lambda$, $\mu \in M$)。そのとき、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ ($\subset \mathcal{P}(X)$)、$\bigcap_{\mu \in M} \mathcal{B}_\mu$ はそれぞれ有限加法族、完全加法族であることを示せ。

2. $\mathcal{A}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) に対して、$\mathcal{A}$ を含む最小の有限加法族、完全加法族がそれぞれ存在することを示せ。

3. $\mathcal{A}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) に対して、$\mathcal{A}$ を含む最小の単調族が存在することを示せ。

4. (1) $\mathcal{F}(\{X\})$ を求めよ。 (2) $\emptyset \subsetneqq A \subsetneqq X$ のとき、$\mathcal{F}(\{A\})$ を求めよ。

5. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。X の完全加法族をすべて求めよ。

6. $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A$ または A^c が有限集合 $\}$ とする。次を示せ。 (1) $\mathcal{F}$ は有限加法族である。 (2) 「$\mathcal{F}$ が完全加法族 $\Longleftrightarrow X$ は有限集合」である。

7. $\mathcal{B}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) とする。そのとき、$\mathcal{B}$ が完全加法族であるための必要十分条件は $\mathcal{B}$ が有限加法族かつ単調族であること示せ。

8. $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) を有限加法族とする。次を順次示せ。

   (1) $A \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ に対して、$\mathcal{M}_A := \{B;\, B, A\cap B, A^c \cap B, A \cap B^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F})\}$ とおく。そのとき、$\mathcal{M}_A$ は単調族である。

   (2) $A \in \mathcal{F}$ ならば、$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ である。

   (3) $A \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ ならば、$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ である。

9. $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) を有限加法族とする。そのとき、$\mathcal{M}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathcal{F})$ であることを示せ。

10. $\mathcal{F}(\mathcal{I}_N) = \{\cup_{j=1}^n I_j;\, n \in \mathbb{N}$ かつ $I_j \in \mathcal{I}_N$ ($1 \le j \le n)\}$ を示せ。

11. $\mathcal{B}_N$ が $\mathbb{R}^N$ の開集合全体の生成する完全加法族に等しいことを示せ。但し、Lindelöf の被覆定理:「 $A \subset \mathbb{R}^N$ とし、$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}^N$ の開集合の族で、$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ を満たすものとする。そのとき、$\exists\{\lambda_k\}_{k=1,2,\cdots} \subset \Lambda$ s.t. $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty O_{\lambda_k}$ 」を既知としてよい。

12. $\mathbb{R}^N$ の可算個の開集合の共通部分になっている集合を G_δ 集合といい、可算個の閉集合の和集合になっている集合を F_σ 集合という。開集合、閉集合はともに G_δ 集合かつ F_σ 集合であることを示せ。

13. $\mathcal{B}$ ($\subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$) を次の性質をもつ集合族で最小のものとする（存在は明らか)。

    (i) $\mathbb{R}^N$ の開集合は $\mathcal{B}$ に属する, (ii) $A_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \cdots$) ならば、$\bigcup_{n=1}^\infty A_n, \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}$ である。そのとき、$\mathcal{B} = \mathcal{B}_N$ を証明せよ。

14. $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) を有限加法族とする。 m を $\mathcal{F}$ 上定義された関数で

    (i) $0 \le m(A) \le +\infty$ ($A \in \mathcal{F}$), (ii) $\exists A \in \mathcal{F}$ s.t. $m(A) < +\infty$,

    (iii) $A, B \in \mathcal{F},\, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow m(A + B) = m(A) + m(B)$

    を満たすものとする。そのとき、m は $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度であることを示せ。

15. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、μ を $\mathcal{B}$ 上の有限な値を取る有限加法的測度 ($0 \le \mu(X) < +\infty$) とする。そのとき、μ が測度であるための必要十分条件は、“$A_n \in \mathcal{B},\ A_n \downarrow \emptyset \Longrightarrow \mu(A_n) \to 0$ ($n \to \infty$)” であることを示せ。

16. μ が有限測度でない測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ では、一般に “$A_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \cdots$), $A_n \downarrow A \Longrightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$ ($n \to \infty$)” は成立しない。そのような例を与えよ。

17. $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ 上の有限加法的測度 m が 2 条件 (i) $m((0, 1]) = 1$, (ii) $m(\{a\} + A) = m(A)$ ($a \in \mathbb{R},\, A \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$) を満たしているならば、$m((a, b]) = b - a$ ($b > a$) であることを示せ。ここで、$\{a\} + A = \{a + x;\, x \in A\}$ を表す。

18. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。そのとき、

    $\{A_n\} \subset \mathcal{B},\, \mu(A_n) = \mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) < +\infty$ ($n = 1, 2, \cdots$) $\Longrightarrow$ $\mu(\cap_{k=1}^\infty A_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty A_k)$

    が成立することを示せ。

19. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。そのとき、$\{A_n\} \subset \mathcal{B}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$ ならば、$\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$, $\mu(\underline{\lim} A_n^c) = \mu(X)$ であることを示せ。

20. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする。そのとき、任意の $E \subset X$ に対して $A_E \in \mathcal{B}$ を適当にとって、

$$\mu(A_E - A) = 0 \text{ for } \forall A \in \mathcal{B} \text{ with } A_E \supset A \supset E$$

が成立するようにできることを示せ。

21. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。$\mathcal{B}_0 := \{A \in \mathcal{B}; \mu(A) < +\infty\}$ とおき、関係 $\sim$ を $A, B \in \mathcal{B}_0$ に対して $A \sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mu(A \triangle B) = 0$ によって定義する。ここで、$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ である。次を示せ。

   (1) $\sim$ は $\mathcal{B}_0$ 上の同値関係である。

   (2) $\widehat{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_0 / \sim$ とおく。$A \in \mathcal{B}_0$ の $\sim$ による同値類を $\widehat{A}$ ($\in \widehat{\mathcal{B}}$) で表すことにする。$\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{\mathcal{B}}$ に対して $\rho(\widehat{A}, \widehat{B}) := \mu(A \triangle B)$ とおく。ρ は代表の取り方によらない。すなわち、「$\mu(A \triangle B) = \mu(A' \triangle B')$ if $A \sim A'$ and $B \sim B'$」である。

   (3) $(\widehat{\mathcal{B}}, \rho)$ は距離空間である。

22. $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値狭義単調増加関数とし、$\mathbb{R}$ の有限加法族 $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ ($= \{\cup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$; $n \in \mathbb{N}$ かつ $-\infty \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \cdots \le a_n \le b_n \le \infty\}$) 上の関数 m_f を $m_f(\cup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j))$ ($-\infty \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le \cdots \le b_{n-1} \le a_n \le b_n \le \infty$) によって定義する。ここで、$f(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ である。

   (1) m_f が $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ 上の有限加法的測度であることを示せ。

   (2) m_f が完全加法的（*i.e.* $A_n \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($j \ne k$), $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ ならば、$m_f(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_f(A_n)$ ）であるための必要十分条件は $f(x)$ が右連続（*i.e.* $f(x) = \lim_{y \to x+0} f(y)$ ($x \in \mathbb{R}$) ）であることである。この必要性を証明せよ（十分性の証明は、教科書等を参)。

23. Let X be an infinite set. Define $m(A) = 0$ if A ($\in \mathcal{P}(X)$) is finite, and $m(A) = \infty$ if A ($\in \mathcal{P}(X)$) is infinite. Prove that m is finitely additive but not completely additive.

24. Let μ be a measure on a completely additive class $\mathcal{B}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$). Prove that

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \quad \text{for } A, B \in \mathcal{B}.$$

25. Let $\{\mu_n\}$ be a sequence of measures defined on the same completely additive class $\mathcal{B}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$). Define $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ by $(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n)(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ for every $A \in \mathcal{B}$. Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ is a measure.

26. Let X consist of a sequence $\{x_m\}$, and let $\{p_m\}$ be a sequence of nonnegative numbers. For any subset A of X, let $\mu(A) = \sum_{x_m \in A} p_m$. Prove that μ is a σ-finite measure.

27. Let $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ be a measure space, and let $f : X \to Y$ be a mapping of X into some set Y. Let $\mathcal{B}_Y$ be the collection of subsets A of Y such that $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_X$. Define $\mu_Y(A) = \mu_X(f^{-1}(A))$ for $A \in \mathcal{B}_Y$. Prove that $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ is a measure space.

28. Let $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ be a measure space, and let $f : X \to Y$ be a mapping. Set $\mathcal{B}_X = \{f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X); B \in \mathcal{B}_Y\}$, and define $\mu_X(A) = \inf\{\mu_Y(B); B \in \mathcal{B}_Y \text{ and } A = f^{-1}(B)\}$ for $A \in \mathcal{B}_X$. Prove that $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ is a measure space.

III. 外測度・ Hopf の拡張定理と Lebesgue 測度

X を集合とする。

- $\mathcal{P}(X)$ 上定義された (集合) 関数 Γ が (Caratheodory) の外測度であるとは、

  (i) $0 \le \Gamma(A) \le \infty$ ($A \in \mathcal{P}(X)$), (ii) $\Gamma(\emptyset) = 0$,

  (iii) $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \le \Gamma(B)$,

  (iv) $A_n \in \mathcal{P}(X)$ ($n = 1, 2, \cdots$) に対して $\Gamma(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

  を満たすときをいう。さらに、$A \in \mathcal{P}(X)$ が

  $$\Gamma(E) = \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E \cap A^c) \quad (\forall E \in \mathcal{P}(X))$$

  を満たすとき、A は Γ-可測であるといい、その全体を $\mathcal{M}_\Gamma$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) で表す。そのとき、$(X, \mathcal{M}_\Gamma, \mu)$ は測度空間になる。ここで μ は Γ の $\mathcal{M}_\Gamma$ 上への制限を表す。

- $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$): 有限加法族、m: $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度、$E \in \mathcal{P}(X)$ に対して

  $(*)$ $\quad \mu^*(E) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j); E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{F}\}$

  とおく。そのとき、

  (1) μ^* は X 上の外測度である。 (2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$

  (3) m が完全加法的 $\Leftrightarrow$ $\mu^*(A) = m(A)$ ($\forall A \in \mathcal{F}$)

  (4) (E. Hopf の拡張定理) m が完全加法的かつ σ-有限 (*i.e.* $\exists X_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, \cdots$) s.t. $m(X_n) < \infty$ & $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$) であるとき、$\mathcal{B}(\mathcal{F})$ 上の測度で m の拡張であるものが一意に定まり、μ^* の $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ 上への制限と一致する。

- 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が完備である

  $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ "$A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{B}$"

- $(X, \mathcal{B}, \mu)$: 測度空間、$\overline{\mathcal{B}} := \{E \in \mathcal{P}(X); E = A \cup N \text{ for some } A \in \mathcal{B} \text{ and } N \in \mathcal{N}\}$ とおく。ここで、$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{P}(X); N \subset A \text{ for some } A \in \mathcal{B} \text{ with } \mu(A) = 0\}$ である。$\bar{\mu}(E) := \mu(A)$ for $E = A \cup N \in \overline{\mathcal{B}}$ with $A \in \mathcal{B}$ and $N \in \mathcal{N}$ と定義する。$\mathcal{N}$ の要素を μ-零集合とよぶ。そのとき、$(X, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ は完備測度空間となり、$(X, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の完備化という。

- Γ: X 上の外測度、μ: Γ の $\mathcal{M}_\Gamma$ 上への制限 とする。そのとき、$(X, \mathcal{M}_\Gamma, \mu)$ は完備測度空間である。

- $(X, \mathcal{B}, \mu)$: 測度空間、$E \in \mathcal{P}(X)$ に対して、$\mu^*(E) := \inf_{E \subset A \in \mathcal{B}} \mu(A)$ と定義する。μ^* の $\mathcal{M}_{\mu^*}$ 上への制限を $\hat{\mu}$ とすれば、μ が σ-有限ならば、$(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \hat{\mu})$ は完備化 $(X, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ と一致する。

- $f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値狭義単調増加関数とし、f が右連続であると仮定する。f によって定義される m_f は $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ 上の完全加法的測度となる (問題 2-22)。m_f によって定義される $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 上の外測度を μ_f^* として、前ページの $(*)$ で m を m_f、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1)$ でおきかえて定義される $\mathbb{R}$ 上の外測度を μ_f^* とする。μ_f^* の $\mathcal{M}_{\mu_f^*}$ 上への制限を μ_f で表す。$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_f^*}, \mu_f)$ は完備測度空間であり、μ_f を (１次元) Lebesgue-Stieltjes 測度という。特に、$f(t) = t$ のとき、$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_f^*}, \mu_f)$ を $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$ で表し、μ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度、$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ に属する集合を (１次元) Lebesgue 可測集合という。$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{\mu_f^*}$ であって、μ_f^* の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上への制限を同じ μ_f で表せば、測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_f)$ の完備化は $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_f^*}, \mu_f)$ に等しい。特に Lebesgue 測度 μ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上への制限 (同じ μ で表す) を (１次元) Borel 測度といい、$(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ の完備化と一致する。n 次元の場合も同様である。

- $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ の濃度は $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の濃度 $2^{\mathfrak{c}}$ に等しい。$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の濃度は $\mathfrak{c}$ であり、また選択公理を仮定すれば、$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ を示せる。よって、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

1. Γ を X 上の外測度とする。そのとき $A\ (\subset X)$ が Γ-可測であるための必要十分条件は、

$$E_1 \subset A,\ E_2 \subset A^c \Rightarrow \Gamma(E_1 \cup E_2) = \Gamma(E_1) + \Gamma(E_2)$$

であることを示せ。

2. Γ を X 上の外測度とする。A: Γ-可測、$B \subset X$ に対して

$$\Gamma(A \cup B) + \Gamma(A \cap B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$$

が成立することを示せ。

3. f を単調増加関数とし、$\mathbb{R}$ の半開区間の和 $E = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ ($I_j = (a_j, b_j]$, $-\infty \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le \cdots \le a_N \le b_N \le \infty$) に対して

$$m_f(E) = \sum_{j=1}^N \{f(b_j + 0) - f(a_j + 0)\}$$

と定義する。$f(x+0)$ は右連続であり、E. Hopf の拡張定理より m_f は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の測度 μ_f に一意に拡張される。$\mu_f((a,b))$, $\mu_f([a,b))$, $\mu_f([a,b])$ を求めよ。ここで、$f(x+0) = \lim_{y \to x+0} f(y)$ である (問題 2-22 参)。

4. X 上の外測度 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ が、$\Gamma(X) < \infty$ かつ $\Gamma(E) = \Gamma_1(E) + \Gamma_2(E)$ ($E \in \mathcal{P}(X)$) を満たしているならば、A が Γ-可測であるための必要十分条件は、A が Γ_1-可測かつ Γ_2-可測であることである。これを示せ。

5. Γ を X の外測度とし、$\{A_n\}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) が２条件 (i) $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($j \neq k$) (ii) $\cup_{k=1}^n A_k \supset B$ かつ $(\cup_{k=1}^{n+1} A_k) \cap C = \emptyset$ ならば $\Gamma(B \cup C) = \Gamma(B) + \Gamma(C)$ を満たすとする。

   (1) $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ に対して

   $$\Gamma(E \cap (\cup_{k=m}^\infty A_{2k})) = \sum_{k=m}^\infty \Gamma(E \cap A_{2k}) \quad (m = 1, 2, \cdots)$$
   $$\Gamma(E \cap (\cup_{k=m}^\infty A_{2k+1})) = \sum_{k=m}^\infty \Gamma(E \cap A_{2k+1}) \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

   が成立することを示せ。

(2)　$A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ は Γ-可測であることを示せ。

Hint: $\Gamma(E \cap A) = \infty$ のとき、$\Gamma(E) = \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E \cap A^c)$ は明らか。$\Gamma(E \cap A) < \infty$ ならば、(1) より $\sum_{k=m}^{\infty} \Gamma(E \cap A_k) \to 0$ ($m \to \infty$)

6. (X, ρ) を距離空間とし、Γ を X 上の外測度で

(∗∗)　　"$\rho(A, B) > 0 \Rightarrow \Gamma(A \cup B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$"

を満たすものとする。そのとき、X の開集合は Γ-可測であることを示せ。逆に X のすべての開集合が Γ-可測であるならば、(∗∗) が成立することを示せ。ここで $\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y);\, x \in A,\, y \in B\}$ である。但し、$\rho(\emptyset, A) = \rho(A, \emptyset) = \infty$ とする。

Hint: 開集合 U に対して、$A_1 := \{x \in X;\, \rho(\{x\}, U^c) \geq 1\}$, $A_n := \{x \in X;\, 1/(n-1) > \rho(\{x\}, U^c) \geq 1/n\}$ ($n = 2, 3, \cdots$) とおいて前問を用いる。逆は、"$\rho(A, B) > 0 \Rightarrow \exists U$: 開集合 s.t. $A \subset U$, $B \subset U^c$" を使う。

7. Γ_j ($j = 1, 2, \cdots$) を X 上の外測度とし、"$j \leq k$, $E \subset X \Rightarrow \Gamma_j(E) \leq \Gamma_k(E)$" を満たしているとする。このとき $\Gamma(E) := \lim_{j \to \infty} \Gamma_j(E)$ によって Γ を定義すれば、Γ は X 上の外測度になることを示せ。

8. f を $\mathcal{P}(X)$ 上定義された関数とし、 (i) $0 \leq f(A) \leq \infty$ ($A \in \mathcal{P}(X)$)、(ii) $A \subset B$ ($\subset X$) $\Rightarrow f(A) \leq f(B)$、(iii) $f(\emptyset) = 0$ を満たすとする。$E \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\Gamma_n(E) := \inf\{\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} f(A_j);\, E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j,\, f(A_j) < 1/n\}$$

と定義する。そのとき、Γ_n は X 上の外測度であり、$\Gamma_n(E) \leq \Gamma_{n+1}(E)$ ($E \in \mathcal{P}(X)$, $n = 1, 2, \cdots$) が成立することを示せ。

注意: 前問より、$\Gamma := \lim_{n \to \infty} \Gamma_n$ は X 上の外測度となる。(X, ρ) が距離空間のとき、f として $f(A) = (\sup\{\rho(x, y);\, x, y \in A\})^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) なる f をとって定義される Γ を α 次元 Hausdorff (外) 測度という。

9. α 次元 Hausdorff 測度 Γ は問題 6 の (∗∗) を満たすことを示せ。

10. $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{P}(X)$) を有限加法族、m を $\mathcal{F}$ 上の完全加法的測度とし、m によって定義される X 上の外測度を Γ とする。次を示せ。

(1)　$\Gamma(E) = \inf\{\Gamma(A);\, E \subset A,\, A \in \mathcal{M}_{\Gamma}\} = \inf\{\Gamma(A);\, E \subset A,\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$

(2)　$\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \Gamma(A_n) = \Gamma(\lim_{n \to \infty} A_n)$

11. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の測度 m に対して、$a \in \mathbb{R}$ を１つ固定して、$f(x) = m((a, x])$ ($x > a$ のとき)、$= -m((x, a])$ ($x < a$ のとき)、$= 0$ ($x = a$ のとき) (但し、$m((a, b]) < \infty$ if $-\infty < a < b < \infty$ と仮定する) と定義する。このとき f は単調増加かつ右連続であることを示せ。さらに、m と Lebesgue-Stieltjes 測度 μ_f は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上一致することを示せ。

12. 次のようにつくられた集合 C を Cantor 集合という: $I = [0, 1]$ とし、I の中点を中心とする長さ $1/3$ の開区間 $J = (1/3, 2/3)$ を考える。$I - J$ は２つの閉区間からなる。それらを左から I_0, I_1 とする。I_i ($i = 0, 1$) の中点を中心とする長さ $1/3^2$ の開区間を

J_i とする。$I_i - J_i$ は２つの閉区間からなり、それらを左から $I_{i,0}, I_{i,1}$ とする。この操作を続けて、$I_{i(1),i(2),\cdots,i(k)}$ ($i(j) = 0$ or 1) を得る。k を１つ固定すると、この形の 2^k 個の閉区間が得られる。これらの区間の和集合を K_k とし、$C = \cap_{k=1}^{\infty} K_k$ によって C を定義する。

(1) C は連続体の濃度 $\mathfrak{c}$ をもつ (C の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しい) ことを示せ。

(2) C の (１次元)Lebesgue 測度は零に等しいことを示せ。

注意: Lebesgue 測度は完備より、$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$ であり、$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ の濃度は $2^{\mathfrak{c}}$ に等しく、Borel 可測でない Lebesgue 可測集合が存在することが分かる (*i.e.* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{L}(\mathbb{R})$)。

13. $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (Lebesgue 可測) とする。そのとき次を示せ。

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists G$: $\mathbb{R}^n$ の開集合 s.t. $G \supset E$, $\mu(G - E) < \varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists F$: $\mathbb{R}^n$ の閉集合 s.t. $F \subset E$, $\mu(E - F) < \varepsilon$
さらに $\mu(E) < \infty$ のとき、F を有界閉集合 (コンパクト) にとれる。

(3) $\exists A$: G_δ 集合, $\exists B$: F_σ 集合 s.t. $B \subset E \subset A$ & $\mu(A - E) = \mu(E - B) = 0$ (G_δ 集合、F_σ 集合は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の要素で定義は問題 2-12 参)

14. $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ であるための必要十分条件は "$\forall \varepsilon > 0, \exists G$: $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\exists F$: $\mathbb{R}^n$ の閉集合 s.t. $F \subset E \subset G$, $\mu(G - F) < \varepsilon$" であることを示せ。

15. (選択公理を用いて、Lebesgue 非可測集合の存在を示そう)

$[0, 1)$ 上の関係 $\sim$ を次のように定義する:

$p, q \in [0, 1)$ に対して、$p \sim q \Rightarrow p - q \in \mathbb{Q}$ (有理数)

次を示せ。

(1) $\sim$ は $[0, 1)$ 上の同値関係である。

(2) $[0, 1)$ を互いに交わらない同値類の和集合に表し、その各同値類から選択公理によって要素を１つ取り出し、その全体を B とする。そのとき $[0, 1) = \cup_{a \in B}[a]$ である。ここで $[a]$ は $\sim$ による a の同値類を表す。"$a, a' \in B$ かつ $a \neq a' \Rightarrow [a] \cap [a'] = \emptyset$" であることに注意する。$[0, 1) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$ と表せば、$[0, 1) = \cup_{n=1}^{\infty}(B + r_n)(\mathrm{mod}\, 1)$ となることを示せ。ここで、$(B + r_n)(\mathrm{mod}\, 1) := \{x \in [0, 1); y \in B \,\&\, x - y - r_n \in \mathbb{Z}\}$ である。

(3) $n \neq m$ (*i.e.* $r_n \neq r_m$) $\Rightarrow (B + r_n)(\mathrm{mod}\, 1) \cap (B + r_m)(\mathrm{mod}\, 1) = \emptyset$

(4) B が Lebesgue 可測ならば $\mu((B + r_n)(\mathrm{mod}\, 1)) = \mu(B)$ である (問題 16 参)。

(5) B は Lebesgue 可測でない。

16. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \mapsto y = {}^t(y_1, \cdots, y_n) = Ax + b$ (ここで、$A = (a_{i,j})$: $n \times n$ 行列、$a_{i,j} \in \mathbb{R}$、$b = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$、$b_j \in \mathbb{R}$) とし、$f$ がアフィン変換 (*i.e.* $\det A \neq 0$) であるとする。μ^* を Lebesgue 外測度とするとき、次を示せ。

(1) $I=(\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times(\alpha_n,\beta_n]$ を $\mathbb{R}^n$ の半開区間とする。

(a) A が単位行列 (*i.e.* $a_{i,j}=\delta_{i,j}$) のとき、
$(***)\quad \mu^*(f(I))=|\det A|\,\mu(I)\ (=|\det A|(\beta_1-\alpha_1)\times\cdots\times(\beta_n-\alpha_n))$
を示せ。

(b) $f(x)={}^t(x_1,\cdots,x_{j-1},cx_j,x_{j+1},\cdots,x_n)$、$c\neq 0$ のとき $(***)$ を示せ。

(c) $f(x)={}^t(x_1,\cdots,x_{j-1},x_k,x_{j+1},\cdots,x_{k-1},x_j,x_{k+1},\cdots,x_n)$、$j<k$ のとき $(***)$ を示せ。

(d) $f(x)={}^t(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j+x_k,x_{j+1},\cdots,x_n)$、$j\neq k$ のとき $(***)$ を示せ。

(e) f がアフィン変換のとき、$(***)$ を示せ。

(2) E ($\subset\mathbb{R}^n$) に対して、$\mu^*(f(E))=|\det A|\,\mu^*(E)$ である。

(3) $E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ($=\mathcal{M}_{\mu^*}$) $\Rightarrow f(E)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

注意: 上より、$E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ならば、$f(E)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ かつ $\mu(f(E))=|\det A|\,\mu(E)$ である。特に Lebesgue 測度は $\mathbb{R}^n$ の直交座標系の取り方に依存せず、平行移動、回転、裏返しに関して不変である。

17. Define $\Gamma(\emptyset)=0$, $\Gamma(E)=1$ if $E\in\mathcal{P}(X)$ and $E\neq\emptyset$. Show that Γ is an outer measure on X, and determine the measurable sets.

18. Let X have a noncountable number of points. Set $\Gamma(E)=0$ if $E\in\mathcal{P}(X)$ and E is countable, $\Gamma(E)=1$ if $E\in\mathcal{P}(X)$ and E is noncountable. Show that Γ is an outer measure on X, and determine the measurable sets.

19. Prove that if an outer measure on X is finitely additive, then it is a measure.

20. $X=\{a,b,c\}$ is a set consisting of exactly three distinct points a, b and c. Γ is defined by the relations $\Gamma(\emptyset)=0$, $\Gamma(\{a\})=\Gamma(\{b\})=\Gamma(\{c\})=1$, $\Gamma(\{a,b\})=\Gamma(\{a,c\})=2$, $\Gamma(\{b,c\})=\alpha$, $\Gamma(X)=\beta$. Find the condition that Γ is an outer measure on X. Moreover, find the condition that $\mathcal{M}_\Gamma=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$.

21. Let $(X,\mathcal{B},\mu)$ be a measure space. Prove that $\overline{\mathcal{B}}=\{E\in\mathcal{P}(X);\ E\triangle A\subset B$ for some $A\in\mathcal{B}$ and $B\in\mathcal{B}$ with $\mu(B)=0\}$, and that $\bar{\mu}(E)=\mu(A)$ if $A\in\mathcal{B}$, $B\in\mathcal{B}$, $\mu(B)=0$ and $E\triangle A\subset B$.

22. The Lebesgue measure of a countable set of points is zero.

23. Let f be a real-valued, monotone increasing function defined on $\mathbb{R}$. Prove that the Lebesgue-Stieltjes measure $\mu_f(\{x\})=0$ for every $x\in\mathbb{R}$ if and only if f is continuous.

24. Let f be a continuous nonnegative function on $[a,b]$, and set $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$. Prove that $G\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, and that $\mu(G)=\int_a^b f(x)\,dx$, where μ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$.

25. Let μ and μ^* be the Lebesgue measure and the Lebesgue outer measure on $\mathbb{R}$, respectively. Prove that $\mu^*(E)=\inf\{\mu(U);\ E\subset U\in\mathcal{O}\}$ for every $E\subset\mathbb{R}$, where $\mathcal{O}$ is the class of all open subsets of $\mathbb{R}$.

26. Let $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ and $0 < \mu(E) < \infty$. Prove that for any α with $0 \leq \alpha < 1$ there is an open interval I such that $\mu(E \cap I) \geq \alpha\mu(I)$.

    Hint: For an open subset U of $\mathbb{R}$ there is a disjoint sequence $\{I_n\}_{n=1,2,\cdots}$ of open intervals whose union is U.

27. Suppose that $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ and $\mu(E \triangle (E+x)) = 0$ for every x in a dense subset of $\mathbb{R}$. Prove that either $\mu(E) = 0$ or else $\mu(E^c) = 0$. Here μ denotes the Lebesgue measure and $E + x = \{x + y \in \mathbb{R};\, y \in E\}$.

    Hint: (1) Assume that an open interval I satisfies $\mu(E \cap I) \geq \alpha\mu(I)$. Prove that for any $N \in \mathbb{N}$ there is an open subinterval I' of I such that $\mu(I') = \mu(I)/N$ and $\mu(E \cap I') \geq \alpha\mu(I')$.
    (2) Assume that $\mu(E) > 0$ and $\mu(E^c) > 0$. Then there are two open intervals I and J such that $2\mu(I)/3 \leq \mu(J) < \mu(I)$, $\mu(E \cap I) \geq 3\mu(I)/4$ and $\mu(E^c \cap J) \geq 3\mu(J)/4$. Moreover, there is x_0 in the dense subset satisfying $J \subset I + x_0$.
    (3) Show that $\mu(E^c \cap J) \leq \mu((E^c + x_0) \cap (I + x_0)) = \mu(E^c \cap I) \leq \mu(I)/4$.

IV. 可測関数と積分

X を集合とする。

- $(X, \mathcal{B})$ を可測空間、$E \in \mathcal{B}$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。ここで $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ である。

  $$f \text{ が (} E \text{ 上の) } \mathcal{B}\text{-可測関数である} \overset{def}{\iff} E(f > a) \in \mathcal{B} \text{ for } \forall a \in \mathbb{R}$$

  ここで、$E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$ である。

- f が $\mathcal{B}$-可測関数

  $\iff$ (i) $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ for $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ii) $E(f = \infty), E(f = -\infty) \in \mathcal{B}$

  (問題 3 参)

- $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ($E \in \mathcal{B}$) が $\mathcal{B}$-可測であるとする。そのとき、(i) $c \in \mathbb{R}$ に対して、$cf(x)$ は E 上定義され、$\mathcal{B}$-可測である。但し、$c = 0$ のとき $cf(x) \equiv 0$ と約束する。(ii) $|f(x)|^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) は E 上定義され、$\mathcal{B}$-可測である。但し $\alpha < 0$ のとき、$f(x) = 0$ なる x に対して $|f(x)|^\alpha = \infty$ とする。また $|f(x)|^0 \equiv 1$ と考える。(iii) $f + g$ は $E - (\{E(f = \infty) \cap E(g = -\infty)\} \cup \{E(f = -\infty) \cap E(g = \infty)\}$ 上定義され、$\mathcal{B}$-可測である。(iv) $f \cdot g$ は $E - (\{E(f = 0) \cap (E(g = \infty) \cup E(g = -\infty))\} \cup \{(E(f = \infty) \cup E(f = -\infty)) \cap E(g = 0)\})$ 上定義され、$\mathcal{B}$-可測である。(v) $\max(f, g), \min(f, g)$ は E 上定義され $\mathcal{B}$-可測である。

- $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ であり、$f(x)$ が $\mathcal{B}$-可測であるための必要十分条件は、f^+, f^- が $\mathcal{B}$-可測であることである。ここで $f^\pm = \max(\pm f(x), 0)$ である。

- $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ($E \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \cdots$)、f_n が $\mathcal{B}$-可測ならば、$\sup_{n\geq 1} f_n(x)$、$\inf_{n\geq 1} f_n(x)$、$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$、$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ も $\mathcal{B}$-可測である。さらに $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば、f は $\mathcal{B}$-可測である。

- $E \in \mathcal{B}$ を固定し、$E_j \subset E$ ($j = 1, 2, \cdots, n$)、$E_j \cap E_k = \emptyset$ ($j \neq k$) とする。また $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \cdots, n$)、$\alpha_j \neq \alpha_k$ ($j \neq k$) とする。$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$ なる形の関数を単関数または階段関数という。ここで、$A \subset E$ に対して、$\chi_A(x) = 1$ ($x \in A$), $= 0$ ($x \in E - A$) であり、χ_A は A の定義関数と呼ばれる。

- $E \in \mathcal{B}$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$、$f(x) \geq 0$ ($x \in E$) とする。

  f が $\mathcal{B}$-可測

  $\Longleftrightarrow$ $\exists \{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$: $\mathcal{B}$-可測単関数の列 s.t.

  $$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \ \& \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E)$$

- $E \in \mathcal{B}$、$f : E \to \mathbb{C}$ とする。$f(x) = \mathrm{Re}\ f(x) + i\ \mathrm{Im}\ f(x)$ とかくと、$\mathrm{Re}\ f : E \to \mathbb{R}$、$\mathrm{Im}\ f : E \to \mathbb{R}$ である。

  f が $\mathcal{B}$-可測 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Re}\ f, \mathrm{Im}\ f$ が $\mathcal{B}$-可測

- $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (Lebesgue 可測集合)、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。

  f が Lebesgue 可測 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$-可測

- $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Borel 集合)、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。

  f が Borel 可測 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-可測

  特に、f が E で上 (下) 半連続であるならば、f は Borel 可測である (問題 2 参)。

- (積分の定義) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間、$E \in \mathcal{B}$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。

  (i) $f(x) \geq 0$ ($x \in E$) のとき、

  (1) $f(x)$ が単関数のとき、すなわち $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$、$E_j \subset E$, $E_j \in \mathcal{B}$, $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \cdots, n$)、$E_j \cap E_k = \emptyset$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ ($j \neq k$) のとき、

  $$\int_E f\, d\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j)$$

  (2) $f(x)$ が単関数でないとき、$\exists \{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$: $\mathcal{B}$-可測単関数の列 s.t. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \ \& \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ($x \in E$)

  そのとき、$\displaystyle\int_E f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ と定義する。

  (ii) 一般のとき ($f : E \to \overline{\mathbb{R}}$)、$\displaystyle\int_E f^+\, d\mu$、$\displaystyle\int_E f^-\, d\mu$ の少なくとも一方が有限であるとき、

  $$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$$

  と定義し、そのときに限り、f は E 上で定積分をもつといい、$\displaystyle\int_E f\, d\mu$ が有限であるとき、f は E 上積分可能であるという。

- $f: E \to \mathbb{C}$ が $\mathcal{B}$-可測であるとする。Re f、Im f が E 上積分可能であるとき、f は E 上積分可能であるといい、

$$\int_E f\,d\mu := \int_E \mathrm{Re}\ f\,d\mu + i\int_E \mathrm{Im}\ f\,d\mu$$

- f が E 上積分可能 $\Leftrightarrow$ $|f|$ が E 上積分可能 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty \Leftrightarrow \int_E f^{\pm}\,d\mu < \infty$

そのとき、$\displaystyle\left|\int_E f\,d\mu\right| \le \int_E |f|\,d\mu$

- (積分の性質) $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$、$E_1 \cap E_2 = \emptyset$、$E = E_1 \cup E_2$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$、$g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。

  (1) f が E 上定積分をもつならば、f は E_1、E_2 上それぞれ定積分をもち、

  $$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$$

  (2) f が E_1、E_2 上それぞれ積分可能ならば、f は E 上積分可能。

  (3) f が E 上積分可能ならば、$\alpha \in \mathbb{R}$ (or $\in \mathbb{C}$) に対して αf も E 上積分可能で、

  $$\int_E \alpha f\,d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu$$

  (4) f、g が E 上積分可能ならば、$f+g$ も E 上積分可能で (但し例えば $f(x) = \pm\infty$、$g(x) = \mp\infty$ のとき $f(x) + g(x) = 0$ と定義する)、

  $$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

  (5) f、g が E 上積分可能で $f(x) \ge g(x)$ ($x \in E$) ならば、$\displaystyle\int_E f\,d\mu \ge \int_E g\,d\mu$

特に断らない限り、$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間、$E \in \mathcal{B}$ とする。

1. 単関数 $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$、($E_j \subset E$、$E_j \cap E_k = \emptyset$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ ($j \neq k$)) が $\mathcal{B}$-可測であるための必要十分条件は、$E_j \in \mathcal{B}$ であることを示せ。

2. $\mathbb{R}$ 上定義された関数 f が上 (下) 半連続であるならば、f は Borel 可測であることを示せ。ここで、

   f が x_0 で上半連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t. "$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$"

   また f が A ($\subset \mathbb{R}$) で上半連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 各 $x \in A$ で f が上半連続

3. $f : E \to \mathbb{R}$、$g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ とし、f が $\mathcal{B}$-可測、g が Borel 可測ならば、合成関数 $g \circ f : E \to \overline{\mathbb{R}} : x \mapsto g(f(x))$ は $\mathcal{B}$-可測である。

   Hint: $\mathcal{F} = \{A|\ A \subset \mathbb{R}$ and $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$ とおき、$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{F}$ が完全加法族であることを示す。

4. $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ($n = 1, 2, \cdots$) は $\mathcal{B}$-可測であるとする。このとき、集合 $\{x \in E|$ 数列 $\{f_n(x)\}$ が収束する $\}$ は $\mathcal{B}$-可測集合であることを示せ。

5. $X = \mathbb{R}$ とする。$\mathbb{R}$ 上の任意の連続関数が $\mathcal{B}$-可測であるための必要十分条件は、$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ であることを示せ。

6. $(X, \overline{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の完備化とする。$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\overline{\mathcal{B}}$-可測であるならば、$\mathcal{B}$-可測関数 $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ で、$|g(x)| \leq |f(x)|$、$\bar{\mu}(E(f \neq g)) = 0$ を満たすものが存在することを示せ。

   <u>Hint</u>: まず f が $\overline{\mathcal{B}}$-可測単関数の場合に示す。

7. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を完備測度空間とし、$E \in \mathcal{B}$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}$-可測、$g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。もし $E(f \neq g) \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(E(f \neq g)) = 0$ ならば、g も $\mathcal{B}$-可測であることを示せ。

8. $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$、$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。

   f が Lebesgue 可測

   $\Leftrightarrow \exists E' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \exists g : E' \to \overline{\mathbb{R}}$: Borel 可測 s.t. $E \subset E'$, $\mu(E(f \neq g)) = 0$

   を示せ。ここで、μ は Lebesgue 測度を表し、$\mu(E(f \neq g)) = 0$ は $E(f \neq g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ をも意味している。

9. $\mu(E) < \infty$ とし、$f_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) は E 上ほとんどいたるところ有限な値をとる $\mathcal{B}$-可測関数であって、E のほとんどすべての点 x で有限な $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するものとする。そのとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$F \subset E$ かつ $\mu(E - F) < \varepsilon$ なる集合 $F \in \mathcal{B}$ が存在して、$\{f_n\}$ は f に F 上一様 収束する (Egorov の定理)。これを証明せよ。

10. $X = \mathbb{R}^N$、$\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$、$\mu$: Lebesgue 測度とする。前問において F を閉集合にとることができることを示せ。

11. $\mathbb{R}$ 上定義された右連続な関数は、Borel 可測であることを示せ。

    <u>Hint</u>: $n = 1, 2, \cdots$ に対して $f_n(x) = f(k/2^n)$ ($(k-1)/2^n < x \leq k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$) によって f_n を定義すると、f_n は Borel 可測であることを示せ。f の右連続性より $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ を示すことができる。

12. $\mathbb{R}$ 上の単調増加関数は Borel 可測であることを示せ。

13. $\mathbb{R}$ 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数が Borel (Lebesgue) 可測となるための必要十分条件は、$n = 1, 2, \cdots$ に対して区間 $[-n, n]$ 上で Borel (Lebesgue) 可測となることである。これを示せ。

14. $X = \mathbb{R}^N$、$\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$、$\mu$: Lebesgue 測度とする。$f : E \to \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測であるとする。そのとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\mu(E - F) < \varepsilon$ かつ $f(x)$ が F 上連続であるような閉集合 $F \subset E$ が存在することを示せ (Lusin の定理)。

15. $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$) とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\mu(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$ かつ $f(x)$ が F_ε 上連続であるような閉集合 $F_\varepsilon \subset E$ が存在するならば、f は Lebesgue 可測であることを示せ。ここで、μ は $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度を表す。

16. Borel 可測関数 f と Lebesgue 可測関数 g の合成関数 $h(x) = g(f(x))$ が Lebesgue 可測にならない例をあげよ。

    Hint: 伊藤清三、ルベーグ積分入門 pp72–73 参

17. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。さらに $f(x) \geq 0$ ($x \in E$) ならば

$$\int_E f \, d\mu > 0 \Leftrightarrow \mu(E(f > 0)) > 0$$

    であることを示せ。

18. $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ かつある $a \in X$ が存在して $\mu(\{a\}) = 1$、$\mu(X - \{a\}) = 0$ であるとする。そのとき、$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して、$\displaystyle\int_X f \, d\mu = f(a)$ であることを示せ。

19. μ が σ-有限ならば、$f(x) > 0$ ($x \in X$) を満たす X 上積分可能な関数 f が存在することを示せ。

20. $f : E \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とし、f が E 上積分可能ならば、

$$\left|\int_E f \, d\mu\right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

    であることを示せ。

21. (積分の第 1 平均値定理) $E \in \mathcal{B}$ かつ $f : E \to \mathbb{R}$ を有界な $\mathcal{B}$-可測関数、$g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ を E 上積分可能な関数とする。そのとき、$f(x)g(x)$ は E 上積分可能でかつ実数 c ($\inf_{x \in E} f(x) \leq c \leq \sup_{x \in E} f(x)$) が存在して、

$$\int_E f|g| \, d\mu = c \int_E |g| \, d\mu$$

    と表すことができることを示せ。

22. f が E 上積分可能ならば、$E(f \neq 0)$ は測度有限な集合の高々可算個の和として表されることを示せ。

23. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$、$f(x) \geq 0$ ($x \in E$) とする。そのとき、

$$\int_E f \, d\mu = \sup \{\textstyle\sum_{j=1}^N (\inf_{x \in E_j} f(x))\mu(E_j)\}$$

    である。ここで、sup は $E = E_1 \cup \cdots \cup E_N$、$E_j \in \mathcal{B}$、$E_j \cap E_k = \emptyset$ ($j \neq k$) なるすべての E の有限分割に対してとられる。これを示せ。

24. Let f be a complex-valued function on E. Prove that f is $\mathcal{B}$-measurable if and only if $f^{-1}(M) \in \mathcal{B}$ for any open set M in the complex plane.

25. Let $f : E \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{B}$-measurable function, and define $g(x) = 0$ if $f(x)$ is rational, $= 1$ if $f(x)$ is irrational. Prove that g is $\mathcal{B}$-measurable.

26. Let $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ be integrable on E. Prove:

    (1) if $\displaystyle\int_A f\,d\mu \geq 0$ for all measurable sets $A \subset E$, then $f \geq 0$ μ-*a.e.*;

    (2) if $\mu(X) < \infty$ and if $\displaystyle\int_A f\,d\mu \leq \mu(A)$ for all measurable sets $A \subset E$, then $f \leq 1$ μ-*a.e.*

27. Show that the function $f(x) = \sin x + \cos x$ is not Lebesgue integrable on the real line.

28. Show that the function $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ is not Lebesgue integrable on the interval $(1, \infty)$.

29. Let $\{f_n\}$ be a sequence of measurable functions on X. Suppose that $\mu(X) < \infty$ and that $\{f_n(x)\}$ is a bounded set for almost every x. Prove that for any $\varepsilon > 0$ there exist a positive number c and a measurable set F with $\mu(X - F) < \varepsilon$ such that $|f_n(x)| \leq c$ for all $x \in F$ and $n = 1, 2, \cdots$.

30. Let $\{f_n\}$ be a sequence of real-valued measurable functions on X, and suppose that $\mu(X) < \infty$. Prove that there exist a positive constants λ_n such that $\{f_n/\lambda_n\}$ converges to zero almost everywhere.

    Hint: $|f_n(x)| \leq$const. on a set E_n with $\mu(X - E_n) < 2^{-n}$.

V. 収束定理と Fubini の定理

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間、$E \in \mathcal{B}$ とする。

- (Lebesgue の単調収束定理) f_n: $E \to \overline{\mathbb{R}}$: $\mathcal{B}$-可測 ($n = 1, 2, \cdots$)

  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ($x \in E$) ならば、

  $$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$$

  である。

- (Fatou の補題) f_n: $E \to \overline{\mathbb{R}}$: $\mathcal{B}$-可測 ($n = 1, 2, \cdots$)、$f_n(x) \geq 0$ ($x \in E$) ならば、

  $$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

  である。

- (Lebesgue の収束定理) f_n: $E \to \overline{\mathbb{R}}$: $\mathcal{B}$-可測 ($n = 1, 2, \cdots$)、g: $E \to \overline{\mathbb{R}}$、$g(x) \geq 0$ ($x \in E$) かつ $g(x)$ は E 上積分可能で $|f_n(x)| \leq g(x)$ ($x \in E$, $n = 1, 2, \cdots$) ならば、f_n、$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$、$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ は積分可能で、

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n \, d\mu, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n \, d\mu$$

が成立する。特に $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ($x \in E$) が存在すれば、

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

が成立する。

- $f(x,t)$ は $x \in E$、$t \in (a,b)$ に対して定義されていて、各 $t \in (a,b)$ に対して $f(x,t)$ は x の関数として $\mathcal{B}$-可測、g: $E \to \overline{\mathbb{R}}$、$g(x) \geq 0$ ($x \in E$) かつ $g(x)$ は E 上積分可能で、さらに $|f(x,t)| \leq g(x)$ ($x \in E$, $t \in (a,b)$) を満たすものとする。もし μ-*a.e.* $x \in E$ に対して、$f(x) = \lim\limits_{t\to a+0} f(x,t)$ が収束するならば、

$$\int_E f(x) \, d\mu = \lim_{t\to a+0} \int_E f(x,t) \, d\mu(x)$$

が成立する。特にすべての $t_0 \in (a,b)$ に対して $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ (μ-*a.e.* $x \in E$) ならば、$\displaystyle\int_E f(x,t) \, d\mu(x)$ は t の連続関数である。

- $f(x,t)$ は $x \in E$、$t \in (a,b)$ に対して定義されていて、各 $t \in (a,b)$ に対して $f(x,t)$ は x の関数として E 上積分可能で、各 $x \in E$ に対して、$f(x,t)$ は t の関数として微分可能、さらに E 上積分可能な関数 $g(x)$ が存在して、$|(\partial/\partial t) f(x,t)| \leq g(x)$ ($x \in E$, $t \in (a,b)$) を満たすとする。そのとき、$\displaystyle\int_E f(x,t) \, d\mu$ は t について微分可能で、

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x,t) \, d\mu(x) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \, d\mu(x) \quad (\, t \in (a,b))$$

が成立する。

- $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$、$(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を σ-有限な測度空間とし、$Z = X \times Y$、$\mathcal{B}_Z \, (= \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y) = \mathcal{B}(\mathcal{I})$ とおく。ここで $\mathcal{I} = \{A \times B; \ A \in \mathcal{B}_X, \ B \in \mathcal{B}_Y\}$ である。$E \in \mathcal{B}_Z$ に対して $\mu(E) \, (= \mu_X \otimes \mu_Y(E)) = \displaystyle\int_X \mu_Y(E_x) \, d\mu_X$ によって、測度 $\mu \, (= \mu_X \otimes \mu_Y)$ を定義する。ここで $E_x = \{y \in Y; (x,y) \in E\}$ である (次の Fubini の定理より上の定義は意味をもつ)。$(Z, \mathcal{B}_Z, \mu)$ を直積測度空間と呼ぶ。その完備化 $(Z, \overline{\mathcal{B}}_Z, \bar{\mu})$ ($= (X \times Y, \mathcal{B}_X \overline{\otimes} \mathcal{B}_Y, \mu_X \overline{\otimes} \mu_Y)$) を完備直積測度空間と呼ぶ。

- (Fubini) (上の記号を用いる) (i) $f(z) \equiv f(x,y)$ は Z 上の $\mathcal{B}_Z$-可測関数で、$f(z) \geq 0$ ($z \in Z$) を満たすものとする。そのとき、$x \in X$ に対して、$f(x,y)$ は y の関数とし

て $\mathcal{B}_Y$-可測、$y \in Y$ に対して、$f(x,y)$ は x の関数として $\mathcal{B}_X$-可測、$\displaystyle\int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y)$ は x の関数で $\mathcal{B}_X$-可測、$\displaystyle\int_X f(x,y)\,d\mu_X(x)$ は y の関数で $\mathcal{B}_Y$-可測である。さらに

$$\int_X d\mu_X(x) \int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y) \Big(= \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y) \Big)\,d\mu_X(x) \Big)$$
$$= \int_Y d\mu_Y(y) \int_X f(x,y)\,d\mu_X(x) = \int_Z f(z)\,d\mu(z)$$

が成立する。

(ii) $f(z) \equiv f(x,y)$ は Z 上の複素数値 (or $\overline{\mathbb{R}}$-値) $\mathcal{B}_Z$-可測関数かつ Z 上積分可能であるとする。そのとき、μ_X-$a.e.$ $x \in X$ に対して $f(x,y)$ は y の関数として ($\mathcal{B}_Y$-可測かつ) Y 上積分可能、同様に μ_Y-$a.e.$ $y \in Y$ に対して $f(x,y)$ は x の関数としても、X 上積分可能で、さらに $\displaystyle\int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y)$ は x の関数で、X 上積分可能である (但し、$\displaystyle\int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y)$ が定義できない x に対しては、その値を例えば 0 としておく)。$\displaystyle\int_X f(x,y)\,d\mu_X(x)$ についても同様である。また

$$\int_X d\mu_X(x) \int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y) = \int_Y d\mu_Y(y) \int_X f(x,y)\,d\mu_X(x) = \int_Z f(z)\,d\mu(z)$$

が成立する。

- (Fubini) $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を σ-有限な完備測度空間とし、$(Z, \overline{\mathcal{B}}_Z, \bar{\mu})$ をその完備直積測度空間とする。そのとき、上の Fubini の定理において、$\mathcal{B}_Z$ を $\overline{\mathcal{B}_Z}$、μ を $\bar{\mu}$、"$x \in X$" を "μ_X-$a.e.$ $x \in X$"、"$y \in Y$" を "μ_Y-$a.e.$ $y \in Y$" で置き換えた命題が成立する。

- $f(z) \equiv f(x,y)$ が Z 上の複素数値 (or $\overline{\mathbb{R}}$-値) $\mathcal{B}_Z$-可測関数 (または $\overline{\mathcal{B}}_Z$-可測関数。但しこのときは、$(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$、$(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ が完備であると仮定する) であって、$\displaystyle\int_X d\mu_X(x) \int_Y |f(x,y)|\,d\mu_Y(y)$、$\displaystyle\int_Y d\mu_Y(y) \int_X |f(x,y)|\,d\mu_X(x)$、$\displaystyle\int_Z |f(z)|\,d\mu(z)$ (但し、f が $\overline{\mathcal{B}}_Z$-可測のときは $\displaystyle\int_Z |f(z)|\,d\bar{\mu}(z)$) のうちの一つでも有限ならば、他の 2 つも有限で値は等しく、Fubini の定理が成立する (適用できる)。

1. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とし、$f(x) \geq 0$ ($x \in X$) と仮定する。任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して、$\nu(E) := \displaystyle\int_E f\,d\mu$ ($0 \leq \nu(E) \leq \infty$) とおけば、$\nu$ は ($\mathcal{B}$ 上) の測度であることを示せ。

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\,dx = 0$ を示せ。

3. 区間 $[0,1]$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} & (\ 0 < x < 1/n), \\ 0 & (\ x = 0 \text{ or } x \geq 1/n) \end{cases}$$

によって定義する。そのとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ を求め、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

が成立するかどうかを調べよ。

4. $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 積分可能関数 f ($f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$) に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & (\ |x| \leq n,\ |f(x)| \leq n \text{ のとき}) \\ n & (\ |x| \leq n,\ f(x) > n \text{ のとき}) \\ -n & (\ |x| \leq n,\ f(x) < -n \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |x| > n \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する ($n = 1, 2, \cdots$)。そのとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

であることを示せ。

5. (平成 16 年度院入試) 区間 $[0,1]$ で定義された非負値ルベーグ可測関数の列 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が、各 $x \in [0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ を満たすものとする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1 + f_n(x)}{x^2 + \exp[f_n(x)]}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

を示せ。

6. (平成 15 年度院入試) 自然数 n に対して

$$f_n(x) = (1 + x^2/n)^{-n} \quad (\ x \in \mathbb{R})$$

とおく。次を示せ。

(1) 各 $f_n(x)$ は $(-\infty, \infty)$ 上 Lebesgue 積分可能である。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}$ である。

7. (平成 14 年度院入試) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上有界かつ一様連続とする。

(1) 任意の実数 y に対して

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x - y/n) - f(x)| = 0$$

を示せ。

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}|f(x-y/n)-f(x)|\,dy=0$

を示せ。

(3) $\displaystyle f_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n^2(x-u)^2}f(u)\,du \quad (\ n=1,2,3,\cdots)$

とするとき、$f_n(x)$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ。但し、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ となることは証明なしに用いてよい。

8. (平成 12 年度院入試) $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ で定義された非負 Lebesgue 可測関数とする。$A=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$ とし μ を Lebesgue 測度とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{(1+f(x))^n}\,dx=\mu(A)$$

が成立することを示せ。

9. (平成 11 年度院入試) $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続な関数 $f(x)$ について、次の等式を示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n^2x^2}f(x)\,dx=f(0)$$

但し、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ は既知とする。(問題 7 で示されているが、別証明を与えよ。)

10. (平成 10 年度院入試) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された微分可能な関数とする。導関数 $f'(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分でかつ正数 C、α が存在して

$$|f(x)|\leq\frac{C}{(1+|x|)^\alpha}\quad (\ x\in\mathbb{R})$$

が成り立つとする。$\varepsilon>0$ に対して

$$I_\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix-\varepsilon x^2}f(x)\,dx,\quad i=\sqrt{-1}$$

とおく。このとき次を示せ。

(1) $\displaystyle I_\varepsilon=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix-\varepsilon x^2}(-2x\varepsilon f(x)+f'(x))\,dx$

(2) $\displaystyle \lim_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix}f'(x)\,dx$

11. (平成 9 年度院入試) $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間、$f(x)$ をその上の実数値可測関数で、すべての $x\in X$ に対して $f(x)>0$ とする。また可測集合 $A,B,C\in\mathcal{B}$ を

$$A=\{x\in X\mid 0<f(x)<1\};$$
$$B=\{x\in X\mid f(x)=1\};\quad C=\{x\in X\mid f(x)>1\}$$

により定義する。このとき

$$\int_A f(x)\mu(dx) < \infty$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_X \tan^{-1}\{f(x)^n\}\mu(dx) = \frac{1}{2}\mu(B) + \mu(C)$$

となることを示せ。

12. $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 積分可能関数 f に対して

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \quad (\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \in \mathbb{R}^n)$$

と定義する (Fourier 変換)。但し、$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ である。次を示せ。

(1) $\hat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数である。

(2) $f(x) = 0$ ($|x| > M$) ならば、$\hat{f}(\xi)$ は C^∞ 級関数である。

13. $E(t,x) := (2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp[-x^2/(4t)]$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) とおく。そのとき、次を示せ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} E(t,x)\,dx = 1$

(2) f を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とする。

$$u(t,x) := \int_{-\infty}^{\infty} E(t, x-y)f(y)\,dy \quad (\ x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \quad (\ t > 0)$$

を満たし ($u(t,x)$ は (t,x) について無限回微分可能)、さらに $\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x)$ を満たす。

14. μ を $\mathbb{R}^n$ における Lebesgue 測度とし、$A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ とする。そのとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu((A - \{x\}) \cap B)\,dx = \mu(A)\mu(B)$$

であることを証明せよ。ここで、$A - \{x\} = \{y - x \mid y \in A\}$ である。

15. f、g を $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 積分可能関数とする。そのとき、$h(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ は $a.e.\ x$ に対して有限な値をとり、$h(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 積分可能で

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,dx \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx\Big)$$

であることを示せ。

16. 前問において、f, g, h の Fourier 変換をそれぞれ $\hat{f}$, $\hat{g}$, $\hat{h}$ とする (問題 12 参)。そのとき、$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ であることを示せ。

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は広義 Riemann 積分として収束する (*i.e.* $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx$ は $A \to \infty$ のとき収束する) が、Lebesgue 積分としては可積分でないことを示せ。

18. (1) $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon$ を満たす連続関数 g が存在することを示せ。

(2) f が $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 積分可能な関数ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon$ かつ $g(x) = 0$ ($|x|$ が十分大のとき) を満たす連続関数 g が存在することを示せ。

(3) f が $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 積分可能ならば

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|\,dx = 0$$

であることを示せ。

19. $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}$-可測 ($n = 1, 2, \cdot$)、$\varphi : E \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}$-可測で、$|f_n(x)| \le \varphi(x)$ ($x \in E$, $n = 1, 2, \cdots$) かつ $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ($x \in E$) であるとする。さらに、ある $p > 0$ に対して $\displaystyle\int_E \varphi(x)^p\,d\mu(x) < \infty$ が成り立つとする。そのとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|^p\,d\mu = 0$ であることを示せ。

20. Let $\mu(X) < \infty$, and let $f(x,t)$ be a function of $x \in X$, $t \in (a,b)$. Assume that for each fixed t, $f(x,t)$ is integrable, and that the partial derivative $\partial f(x,t)/\partial t$ exists and is uniformly bounded for $x \in X$, $t \in (a,b)$. Then, for each $t \in (a,b)$, $\partial f(x,t)/\partial t$ is integrable, $\displaystyle\int f(x,t)\,d\mu(x)$ is differentiable, and

$$\frac{d}{dt}\int f(x,t)\,d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,d\mu(x).$$

Prove this, applying the Lebesgue bounded convergence theorem.

21. Let $f(x)$ be Lebesgue measurable on the real line, and let $f(x) \ge 0$ and $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$. Prove that the function $g(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,dx$ ($0 < t < \infty$) is differentiable, and $g'(t) = -\displaystyle\int_0^\infty x e^{-tx} f(x)\,dx.$

22. Give an example where Fatou's lemma holds with strict inequality.

23. If $\mu(X) < \infty$ and if $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions that converges uniformly to a function f, then f is integrable and $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$

24. Prove that $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

25. Prove that $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$.

26. Prove that $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\overline{\otimes}\mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \mu_n\overline{\otimes}\mu_m) = (\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}), \mu_{n+m})$. where μ_k denotes the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^k$.

27. Let $f(x)$ and $g(y)$ be integrable functions on X and Y, respectively. Then the function $h(x,y) = f(x)g(y)$ is integrable on $X \times Y$, and

$$\int h\, d(\mu_X \otimes \mu_y) = \int f\, d\mu_X \int g\, d\mu_Y.$$

28. f が X 上積分可能な関数ならば、$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta_\varepsilon > 0$ s.t. “$E \in \mathcal{B},\ \mu(E) < \delta \Rightarrow \left|\int_E f\, d\mu\right| < \varepsilon$” を示せ。

29. f が $\mathbb{R}^n$ 上の積分可能な関数ならば、任意の $y \in \mathbb{R}^n$、$A \in M(n;\mathbb{R})$ (: $n \times n$ 実行列) かつ $\det A \neq 0$ に対して $g(x) := f(Ax+y)$ も Lebesgue 積分可能で

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

であることを示せ。

30. $\mu(X) < \infty$ とする。f_n ($n = 1, 2, \cdots$)、f を X 上定義された $\mathcal{B}$-可測関数とする。そのとき $\{f_n\}$ が f に測度収束する (*i.e.* $\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$) するための必要十分条件は $\displaystyle\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \to 0$ ($n \to \infty$) であることを示せ。

31. $\mu(X) < \infty$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (μ-*a.e.* $x \in X$) ならば、$\{f_n\}$ は f に測度収束することを示せ。

32. “$\displaystyle\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$ ($n \to \infty$) $\Rightarrow \{f_n\}$ は f に測度収束する” を証明せよ。

33. $\{f_n\}$ が f に測度収束するならば、適当な部分列 $\{f_{n(k)}\}$ で f に殆ど至るところ収束するものが存在することを示せ。

34. $\{f_n\}$ が f に測度収束し、φ が X 上積分可能で、$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ ($x \in X, n = 1, 2, \cdots$) を満たすならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|\, d\mu = 0$ を示せ。