

# 円周率 $\pi$ の計算

若林 誠一郎

## 1. $\pi$ とは

ギリシア語で周を表す  $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\varsigma$  ( perimetros ) の頭文字  $\pi$  によって円周率を表す ( 1706 年 Jones がはじめて用い, その後 Euler が使って普及した ). 円周率  $\pi$  は

$$\pi = \text{“円周の長さ”} \div \text{“直径の長さ”}$$

によって定義される. この定義には, 少なくとも 2 つの問題点がある. 線分の長さは既知としても, 円周は曲線であり, 曲線の長さをどのように定義するのか? 次に円周の長さが定義されたとして, “円周の長さ” と “直径の長さ” の比は常に一定であるのか? すなわち, この比が “直径の長さ” や “円の中心の位置” を変えれば変化しないのか?

曲線  $C$  の長さは, 図 1 のように曲線  $C$  上に  $(n+1)$  個 ( 有限個 ) の分点  $P_0, P_1, \dots, P_n$  を取り (  $P_0, P_n$  を端点とする ), 折れ線  $\overline{P_0P_1P_2 \cdots P_{n-1}P_n}$  の長さが  $n \rightarrow \infty$  としたとき, 一定の極限值に近づくとき, その極限によって定義される ( 但し, 各線分  $\overline{P_{j-1}P_j}$  (  $j = 1, 2, \dots, n$  ) の長さは  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束するように分点を増やしていく ). このとき, 曲線  $C$  は求長可能であるという. 極限が存在しないときや, 分点の選び方によって極限が異なるときは, 曲線  $C$  は求長可能でない ( 長さを持たない ) という. 関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で定義されていて, そこで微分可能かつ導関数  $f'(x)$  が連続であるとする. 曲線  $C$  が関数  $y = f(x)$  (  $a \leq x \leq b$  ) のグラフであるとき, 曲線  $C$  の長さ  $\ell$  は

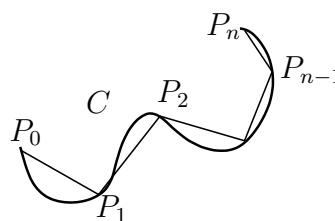


図 1

$$(1) \quad \ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

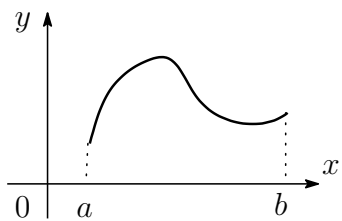


図 2

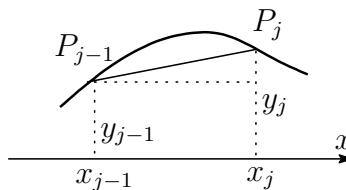


図 3

によって与えられる ( 図 2 参 ). 実際,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  として,  $y_j = f(x_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) とおいて, グラフ  $C$  上に分点  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$  をとる. このとき,

$$\begin{aligned} \text{“折れ線 } \overline{P_0P_1 \dots P_n} \text{ の長さ”} &= \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \\ &= \sum_{j=1}^n \sqrt{1 + \{(y_j - y_{j-1}) / (x_j - x_{j-1})\}^2} (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

であり, 微分の定義より  $(y_j - y_{j-1}) / (x_j - x_{j-1}) \approx f'(x_j)$  である ( 図 3 参 ). よって,  $n \rightarrow \infty$  として (1) が得られる ( 厳密な証明にはなっていない ). この講義で扱う円 ( 円周 ) とは, ( 座標 ) 平面上の一定点  $O(a, b)$  から一定の距離  $r$  ( $> 0$ ) をもつように平面上の点  $P(x, y)$  を動かしたとき, 点  $P(x, y)$  の描く図形であると考え. したがって,

$$\begin{aligned} \text{“点 } P(x, y) \text{ がこの円 ( 円周 ) 上にある”} &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ &\iff \begin{cases} y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2} & \text{かつ } a - r \leq x \leq a + r \text{ ( } y \geq b \text{ のとき)} \\ y = b - \sqrt{r^2 - (x - a)^2} & \text{かつ } a - r \leq x \leq a + r \text{ ( } y \leq b \text{ のとき)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a + \sqrt{r^2 - (y - b)^2} & \text{かつ } b - r \leq y \leq b + r \text{ ( } x \geq a \text{ のとき)} \\ x = a - \sqrt{r^2 - (y - b)^2} & \text{かつ } b - r \leq y \leq b + r \text{ ( } x \leq a \text{ のとき)} \end{cases} \end{aligned}$$

故に,  $(d/dx)(b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}) = \pm(a - x) / \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$  に注意して ( 合成関数の微分公式 ),

$$\text{“円周の長さ”} = 2 \int_{a-r/\sqrt{2}}^{a+r/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{(x - a)^2}{r^2 - (x - a)^2}} dx + 2 \int_{b-r/\sqrt{2}}^{b+r/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{(y - b)^2}{r^2 - (y - b)^2}} dy$$

合成関数の微分・置換積分の公式:  $g(t)$  は  $[\alpha, \beta]$  で微分可能で, 導関数  $g'(t)$  が連続であるとする. さらに,  $F(x)$  は  $[c, d]$  で微分可能で導関数  $F'(x) \equiv f(x)$  が連続でかつ  $c \leq g(t) \leq d$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) であると仮定する. このとき, 合成関数  $F(g(t))$  も微分可能で

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) \quad (= f(g(t))g'(t))$$

これを  $t$  について  $\alpha$  から  $\beta$  まで積分すると,  $F(d) - F(c) = \int_c^d f(x) dx$  等に注意して, 置換積分の公式

$$(2) \quad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x) dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

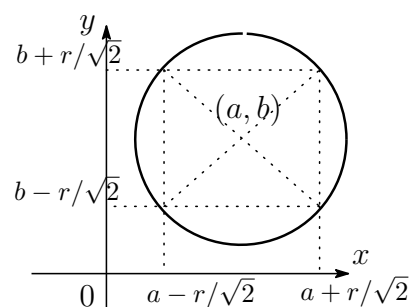


図 4

が得られる. (2) で,  $g(t) = a + rt$ ,  $f(x) = \sqrt{1 + (x - a)^2 / (r^2 - (x - a)^2)}$  とおいて,

$$\int_{a-r/\sqrt{2}}^{a+r/\sqrt{2}} f(x) dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} r dt = r \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

となる. よって

$$\text{“円周の長さ”} = 4r \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

を得る. これより

$$(3) \quad \pi = 2 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (= 4 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt)$$

であり,  $\pi$  が中心の座標  $(a, b)$  や半径  $r$  によらず一定であることがわかる.

60 進法を用いていた古代バビロニア人は, 角度の単位として現在も使われている  $^\circ$  (度) を用いた.  $180^\circ$  を  $\pi$  (ラジアン) とすると, 半径 1 の扇形の中心角が  $\theta$  (ラジアン) であれば, その扇形の弧の長さは  $\theta$  である. 以下, 角度の単位としてラジアンを用いる.

次に, 面積について考えよう. 正方形の面積を既知とすれば, 長方形, 三角形の面積を定義することは比較的容易である. したがって, 一般の多角形の面積を定義することもできる. 厳密ではないが, 曲線で囲まれた平面図形  $F$  の面積は, 図 5 のように  $F$  に含まれる有限個の長方形の面積の和

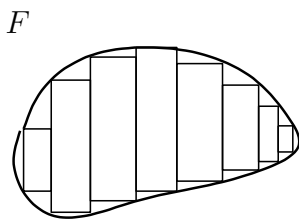


図 5

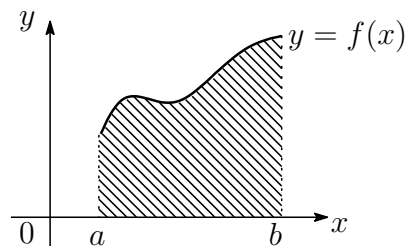


図 6

の (長方形の個数を限りなく大きくして図形  $F$  を内側から近似したときの) 極限として定義される (極限が存在しない可能性もある). 特に,  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続で  $f(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) を満たすとき, 図 6 の斜線の部分の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

で与えられる. これより

$$\text{“半径 } r \text{ の円の面積”} = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

を得る (ここで,  $g(t) = rt$ ,  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  として置換積分の公式 (2) を用いた). 図 7 のように円を  $n$  個の等しい扇形に分けて並べかえると, 長方形に近い形ができる. 縦は  $r$ ,

横は“円周の半分” ( $= \pi r$ ) にほぼ等しい.  $n \rightarrow \infty$  として, 縦  $r$ , 横  $\pi r$  の長方形に近づくので, 円の面積は  $\pi r^2$  であることがわかる. 故に

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 4 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

である.

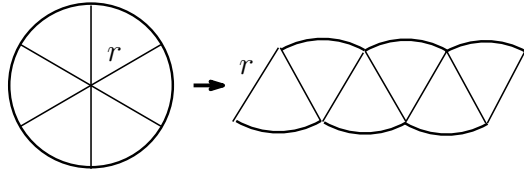


図 7

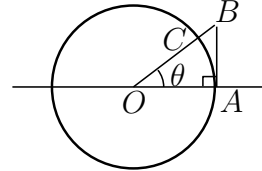


図 8

## 2. Archimedes の方法

直径 1 の円に外接及び内接する正  $n$  角形の周の長さをそれぞれ  $L_n, \ell_n$  とすると, 面積を比較して  $\ell_n < \pi < L_n$  ( また図 8 より,  $0 < \theta < \pi/2$  として “ $\triangle OAC$  の面積”  $= \sin \theta / 2 < “$ 扇形  $OAC$  の面積”  $= \theta / 2 < “\triangle OAB$  の面積”  $= \tan \theta / 2$  より  $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ .  $\theta = \pi/n$  とおいて,  $\ell_n = n \sin \theta$ ,  $\pi = n\theta$ ,  $L_n = n \tan \theta$  ).

$$(4) \quad L_{2n} = \frac{2\ell_n L_n}{\ell_n + L_n} \quad \left( \frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L_n} + \frac{1}{\ell_n} \right) \right), \quad \ell_{2n} = \sqrt{\ell_n L_{2n}}$$

である. 例えば, (4) の第 2 式は

$$\ell_n L_{2n} = 2n^2 \sin \frac{\pi}{n} \tan \frac{\pi}{2n} = 4n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} = \ell_{2n}^2$$

よりわかる.

**問題 1.** (4) の第 1 式を証明せよ.

Archimedes ( B.C. 287?-212 ) は  $n = 6$  からはじめて  $\ell_{96}$  及び  $L_{96}$  を計算して (  $96 = 6 \cdot 2^4$  ),  $3\frac{10}{71} (\approx 3.1408) < \pi < 3\frac{1}{7} (\approx 3.1429)$  を得た.

**問題 2.**  $L_6 = 2\sqrt{3}$ ,  $\ell_6 = 3$ ,  $L_{12} = 12(2 - \sqrt{3})$ ,  $\ell_{12} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ,  $L_{24} = 24(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3})$ ,  $\ell_{24} = 6\sqrt{8 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}$  を示せ.

はじめに  $n = 4$  ととって,  $L_4 = 4$ ,  $\ell_4 = 2\sqrt{2}$  より,  $L_{2^n}, \ell_{2^n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) が順次求められる.

$$a_0 = \frac{2}{\ell_4} \left( = \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \quad a_n = \frac{\ell_{2^{n+1}}}{\ell_{2^{n+2}}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくと,  $a_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ( 実際,  $n = 0$  のときは明らか.  $a_n = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} / \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に加法定理を適用する ). 故に

$$a_{n+1} = \cos \frac{\pi}{2^{n+3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_n}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる.  $2/\ell_{2^{n+2}} = a_0 a_1 \cdots a_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_{2^{n+2}} = \pi$  より

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

この公式 (無限乗積) は 1593 年 Viète によって得られた. 例えば,  $\pi \approx 2/(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4) = 3.1403 \cdots$  である.

**問題 3.**  $0 \leq \theta < \pi$  のとき

$$\theta = \frac{\sin \theta}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \cdots} \quad \left( = \sin \theta / \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} \right) \right)$$

(Euler) を示せ.

### 3. Arctan と Gregory 級数

$0 \leq \theta < \pi/2$  とし, §1 と同様にして, 図 9 において

$$\text{“弧 } AB \text{ の長さ”} = \theta = \int_0^{\sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

である.  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ,  $g(t) = t/\sqrt{1+t^2}$  とおいて,  $1-g(t)^2 = 1/(1+t^2)$ ,  $\sin \theta = \tan \theta / \sqrt{1+\tan^2 \theta}$  及び  $g'(t) = (1+t^2)^{-3/2}$  に注意して, 置換積分の公式 (2) を用いて,

$$\begin{aligned} (5) \quad \theta &= \int_0^{\tan \theta} (1+t^2)^{1/2} \cdot (1+t^2)^{-3/2} dt \\ &= \int_0^{\tan \theta} \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

を得る. 特に,  $\theta = \pi/4$  と取ると

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

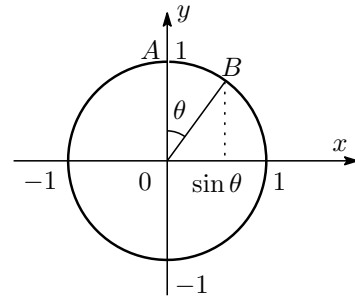


図 9

を得る.  $-\pi/2 < x < \pi/2$  に対して  $y = \tan x$  とおくと, 図 10 からわかるように, 逆に  $y$  を与えれば  $-\pi/2 < x < \pi/2$  を満たす  $x$  が唯一つさだまる. これを  $\text{Arctan } y$  とかく.

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = \tan x \iff x = \text{Arctan } y$$

(  $\text{Arctan } y$  を  $\text{Tan}^{-1} y$  ともかき,  $\tan$  の逆関数という ).  
故に (5) より

$$\text{Arctan } y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt$$

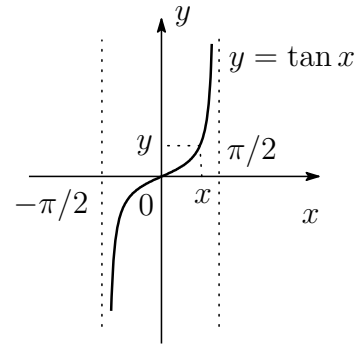


図 10

(  $-\infty < y < \infty$  で上は成立する ). 等比級数の和の公式 (  $1 + r + r^2 + \dots + r^n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$  (  $r \neq 1$  ) ) より

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

故に

$$\begin{aligned} \text{Arctan } y &= \int_0^y (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n}) dt + R_n(y) \\ &= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + R_n(y) \\ R_n(y) &= \int_0^y (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

を得る. 特に,  $|y| \leq 1$  に対して

$$|R_n(y)| \leq \left| \int_0^y \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^y t^{2n+2} dt \right| = \frac{|y|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

と評価され,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $R_n(y) \rightarrow 0$  (  $|y| \leq 1$  ). 故に  $y$  を  $x$  と書き換えて,  $|x| \leq 1$  のとき

$$(6) \quad \text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)$$

が成立する. この式は, 1670 年 Gregory によって得られ, Gregory 級数と呼ばれている. 特に  $x = 1$  とすると,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1} \right)$$

となり, この級数は Gregory とは独立に 1674 年に Leibnitz によっても得られている ( Leibnitz 級数 ). (6) は関数  $\text{Arctan } x$  の  $x = 0$  における Taylor 級数展開 ( Maclaurin

展開) と呼ばれるものである. 一般に  $f(x)$  の  $x = 0$  における Taylor 級数展開は

$$f(x) \sim f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

で与えられる. 右辺は無限級数で, 一般にはこの級数が  $f(x)$  に収束するとは限らない.  $e$  を  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  によって定義すると, 指数関数  $e^x$  に対しては, すべての実数  $x$  に対して

$$(7) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

が成立する. また, 同様にすべての実数  $x$  に対して

$$(8) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(9) \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

が成立する. (7), (8), (9) の右辺によって, 複素数  $x$  に対してもそれぞれ  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  を定義することができる. 特に

$$(10) \quad e^{\sqrt{-1}x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \sqrt{-1} \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

( Euler の関係式 ) を得る.

## 4. $\pi$ の公式

(6) で  $x = 1/\sqrt{3}$  とおいて,  $\text{Arctan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$  より

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$$

( 1699 年 Sharp ). 今,  $-\pi/2 < \alpha, \beta, (\alpha + \beta) < \pi/2$  とする. 加法定理より

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

である. 故に,  $p = \tan \alpha, q = \tan \beta$  とおいて

$$\alpha + \beta = \text{Arctan } p + \text{Arctan } q = \text{Arctan} \left( \frac{p+q}{1-pq} \right)$$

これを用いて,  $2\text{Arctan}(1/5) = \text{Arctan}(5/12)$ ,  $4\text{Arctan}(1/5) = \text{Arctan}(120/119)$  を得る. 故に

$$(11) \quad 4\text{Arctan} \frac{1}{5} - \text{Arctan} \frac{1}{239} = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$$

を得る. (6), (11) より Machin の公式 ( 1706 年 )

$$(12) \quad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right)$$

が得られる. 現在まで同種の公式は約 300 個知られている.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4\text{Arctan } \frac{1}{5} - \text{Arctan } \frac{1}{70} + \text{Arctan } \frac{1}{99} && \text{( Rutherford )} \\ &= 6\text{Arctan } \frac{1}{8} + 2\text{Arctan } \frac{1}{57} + \text{Arctan } \frac{1}{239} && \text{( シュテルマー )} \\ &= 12\text{Arctan } \frac{1}{18} + 8\text{Arctan } \frac{1}{57} - 5\text{Arctan } \frac{1}{239} && \text{( Gauss )} \\ &= 5\text{Arctan } \frac{1}{7} + 2\text{Arctan } \frac{3}{73} && \text{( Machin )} \\ &= 2\text{Arctan } \frac{1}{3} + \text{Arctan } \frac{1}{7} && \text{( Euler )} \\ &= \text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } \frac{1}{3} && \text{( Euler )} \\ &= 3\text{Arctan } \frac{1}{4} + \text{Arctan } \frac{5}{99} && \text{( Hutton )} \\ &= 8\text{Arctan } \frac{1}{10} - \text{Arctan } \frac{1}{239} - 4\text{Arctan } \frac{1}{515} && \text{( クリンジェンシエルナ )}. \end{aligned}$$

問題 4. (11) を示せ.

Gauss-Legendre の公式:  $a_0 = 1, b_0 = \cos \alpha > 0, a_{n+1} = (a_n + b_n)/2, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$   
(  $n = 0, 1, 2, \dots$  ) とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pi / \left( 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} d\theta \right)$$

であることが示されている. この極限を  $a_0, b_0$  の Gauss の算術幾何平均という.  $\alpha = \pi/4$   
(  $b_0 = 1/\sqrt{2}$  ) ととって,  $c_0 = 1/\sqrt{2}, c_{n+1} = a_n - a_{n+1}$  (  $n = 1, 2, \dots$  ),  $t_n = 1/4 - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} c_k^2$  (  $n = 1, 2, \dots$  ) と定義する. このとき,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$  が存在して,  $\pi = A^2/T$  を満たす. これより次の  $\pi$  の計算法を得る:

$A = 1: B = 1/\sqrt{2}: T = 1/4: X = 1$  とおき, 次の  $\{ \dots \}$  の部分を繰り返す.  
 $\{ Y = A: A = (A+B)/2: B = \sqrt{BY}: T = T - X(A-Y)^2: X = 2X \}$   
ここで,  $Y = A$  は  $Y$  に  $A$  の値を代入することを意味する. そのとき,  $(A+B)^2/(4T)$   
( 及び  $A^2/T$  ) は  $\pi$  に収束する ( 1976 年 Salamin, Brent ).

問題 5. Machin の公式 (12) 及び Gauss-Legendre の公式を用いて,  $\pi$  の ( 近似 ) 値を求めよ.

その他の公式:

$$\pi = 2 \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \right) \quad \text{( Wallis )}$$

これは  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  において,

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$



より導かれる. ここで,  $(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2$ ,  $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdot 1$  である.  $\pi/24 = \sqrt{3}/32 + \int_0^{1/4} \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx$  を用いて,

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1!!}{7 \cdot 2! \cdot 2^8} - \frac{3!!}{9 \cdot 3! \cdot 2^{11}} + \cdots \right) \quad (\text{Newton})$$

連分数を用いて,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \cdots}}}} = \left( = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \cdots}}}} \right)$$

(Brouncker, Euler). これは,  $S = a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots = \frac{a_1}{1 - a_1} + \frac{a_2}{1 - a_2} + \frac{a_3}{1 - a_3} + \cdots$  と (6) より従う. また,  $\text{Arctan}(1/(2n-1)) = \text{Arctan}(1/(2n^2)) + \text{Arctan}(1/(2n+1))$  より

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \text{Arctan} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \cdots$$

(Euler) が得られる.  $\pi/6 = \int_0^{1/2} 1/\sqrt{1-x^2} dx$  より

$$\pi = 3 \left( 1 + \frac{1!!}{1! \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{3!!}{2! \cdot 5 \cdot 2^6} + \frac{5!!}{3! \cdot 7 \cdot 2^9} + \cdots \right)$$

(Euler) が得られる.

$$\begin{aligned} \pi^2 &= 9 \left( 1 + \frac{1^2}{3 \cdot 4} + \frac{1^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots \right) && (\text{建部, 松永}) \\ &= 6 \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) && (Euler) \\ &= 12 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots \right) && (Euler) \end{aligned}$$

積分の近似計算:  $h = 1/(2n)$ ,  $x_k = kh$ ,  $y_k = 1/(1+x_k^2)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ) とおいて,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx \frac{h}{2} \{y_0 + y_{2n} + 2(y_1 + \cdots + y_{2n-1})\} \\ &\quad (\text{台形公式}) \\ &\approx \frac{h}{3} \{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \cdots + y_{2n-1})\} \\ &\quad (\text{Simpson の (1/3) 公式}) \end{aligned}$$

台形公式の誤差は  $2h^2$  以下, Simpson の公式の誤差は  $8h^4/15$  以下である. 台形公式は  $\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} 1/(1+x^2) dx$  を “台形  $ABED$  の面積” + “台形  $BCFE$  の面積” で近似したものであり, Simpson の公式は点  $A, B, C$  を通る放物線で関数のグラフを近似して積分したものである.

**問題 6.** 台形公式及び Simpson の公式を証明せよ. また Simpson の公式を用いて,  $\pi$  の近似値を求めよ.

**Buffon の針:** 床の上に間隔  $d$  で平行線を多数引き, 長さ  $L (< d)$  の針をでたらめに落下させる. このとき針がこれらの直線のどれかと交わる確率は  $2L/(\pi d)$  である. これより実験によって  $\pi$  の近似値を得ることができる. 実際, 確率は

$$\int_0^\pi \frac{L}{2} \sin x dx / \text{“長方形 } ABCO \text{ の面積”}$$

で与えられる ( 何故か? ).

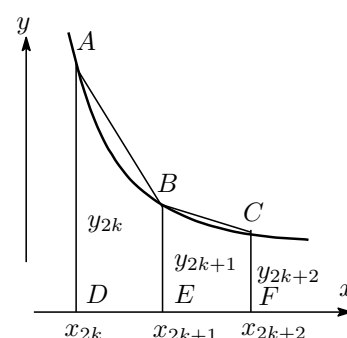


図 11

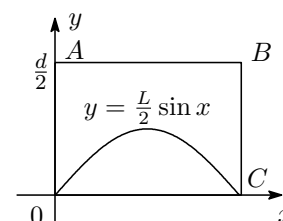


図 12

## 5. 円積問題と $\pi$ の超越性

**ギリシアの三大難問:** 定木とコンパスのみを使って, 次を作図せよ.

1. 角の 3 等分 ( 例えば, 角  $60^\circ (= \pi/3)$  を 3 等分せよ ).
2. 立方体の倍積 ... 与えられた立方体のちょうど 2 倍の体積をもつ立方体を作図せよ ( 長さ 1 が与えられたとき,  $\sqrt[3]{2}$  の長さを作図せよ ).
3. 円の正方形化 ( 円積問題 ) ... 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を作図せよ.

**定木とコンパスによる作図:** ( 座標 ) 平面上の点  $O(0, 0), E(1, 0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_r(x_r, y_r)$  が与えられたとき, 直線としてはこれらの 2 点を通る直線のみを考え, 円としてはこれらの点の 1 つを中心, これらの点の 2 点間の距離を半径とする円のみを考える. そのとき, これらの直線及び円の交点として得られる点を  $O, E, P_1, \dots, P_r$  に追加する. 以下これを有限回繰り返して点  $P(x, y)$  が得られたとすると,  $x, y$  は  $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$  に 5 種の演算

- (1) 加法 (2) 減法 (3) 乗法 (4) 除法 (5) 正の数の開平 ( $\sqrt{\quad}$ )

を施して得られる実数である ( 逆もいえる ). 特に  $x$  及び  $y$  はそれぞれ  $m$  を自然数として  $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$  の有理式を係数とする  $2^m$  次の代数方程式の解である.

1839年にWantzelがギリシアの難問1, 2が作図不可能であることを示した (Galoisの理論). 同様の作図問題に正  $n$  角形の作図可能性の問題がある. Gauss は

$$\begin{aligned} \text{“正 } n \text{ 角形が作図可能”} &\Leftrightarrow n = 2^a p_1 p_2 \cdots p_s, p_1, \dots, p_s \text{ は相異なる Fermat 数} \\ &\Leftrightarrow n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots \end{aligned}$$

を示した. ここで  $p$  が Fermat 数とは,  $p$  は素数でかつ  $p = 2^m + 1$  の形に表せる数のことである. ギリシアの難問3は長さ1が与えられたとき,  $\pi$  の長さを作図できるかという問題になる. 1767年に, 連分数を用いてLambertによって $\pi$ が無理数であることが示された. 整数を係数にもつ代数方程式の解になる (複素) 数を代数的数と呼び, 代数的数でない (複素) 数を超越数と呼ぶ.  $\sqrt{2}$  は無理数ではあるが, 代数的数でもある. 1882年に, Lindemann は次を証明した.

$$a_1, \dots, a_n \text{ が代数的数で } |a_1| + \dots + |a_n| \neq 0 \text{ を満たし, } r_1, \dots, r_n \text{ が相異なる代数的数ならば, } a_1 e^{r_1} + \dots + a_n e^{r_n} \neq 0 \text{ である.}$$

これと, Euler の関係式 (10) より従う  $e^{\sqrt{-1}\pi} + e^0 = 0$  より,  $\pi$  が超越数であることが示される. 故に, 円積問題3が作図不可能であることがわかる.

#### 参考文献

- ベックマン, 「 $\pi$  の歴史」, 田尾陽一, 清水韶光訳, 蒼樹書房, 1973.
- 野崎昭弘, 「 $\pi$  の話」, 岩波, 1974.
- 金田康正, 「 $\pi$  のはなし」, 東京図書, 1991.
- Hobson, E. W., “Squaring the Circle”, Oxford Univ. Press, 1913.
- ポストニコフ, 「ガロアの理論」, 日野寛三訳, 東京図書, 1964.

#### 付録 1 $\pi$ の表

$\pi = 3.+$

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679  
 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196  
 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273  
 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094  
 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912  
 .....

産医師異国に向こう. 産後厄なく産婦みやしろに虫さんざん間に鳴く.

3 1 4 1592 6 5 3 5 897 9 3 2 38 4 6 2 64 3 3 832 7 9

産医師異国に向こう. 産後葉なく産に産婆四郎二郎死産, 産婆さんに泣く, ご礼には早よくな.

3 1 4 1592 6 5 3 5 897 9 3 2 38 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7

## 付録 2 $\pi$ の計算の歴史

|        |  |      |   |
|--------|--|------|---|
| B.C.   | バビロニア人 $\pi = 25/8$ を使う                                      | 1945 | フェルグソン Shanks のミスを発見                    |
| 2000 頃 | " エジプト人 $\pi = (16/9)^2$                                     | 1946 | フェルグソン 620 桁                            |
| B.C.   | Archimedes (ギリシャ) $223/71 < \pi$                             | 1947 | フェルグソン 808 桁 卓上計算機                      |
| 3 世紀   | $< 22/7$ (正 96 角形を使う)  | 1949 | リトワイズナー等 2037 ENIAC *M                  |
| 3 世紀   | 劉徽 (魏) $\pi \approx 3.14159$                                 | 1954 | ニコルソン, ジーネル 3092 NORC *M                |
|        | (正 3072 角形を使う)   | 1957 | フェルトン 7480 Pegasus                      |
| 5 世紀   | 祖冲之 (宋) $3.1415926 < \pi$                                    | 1958 | ジェニューイス 10000 IBM704 *M                 |
|        | $< 3.1415927$  | 1959 | ギュー 16167 IBM704 *M                     |
| 500 頃  | Aryabhata (アールヤバタ, インド) $\pi \approx 3.1416$                 | 1961 | シャンクス, レンチ 100265 IBM7090 *S            |
| 1593   | Viète (フランス) $\pi$ を無限乗積で表す                                  | 1966 | ギュー, フィリヤトル 25 万 IBM7030 *G             |
| 1596   | Ludolph (オランダ) $\pi$ を小数点以下 32 桁, 後に 35 桁 (正 $2^{62}$ 角形を使う) | 1967 | ギュー, ディシャン 50 万 CDC6600 *G              |
| 1665/6 | Newton $\pi$ を 15 桁以上計算                                      | 1973 | ギュー, ブーエ 1,001,250 CDC7600 *G           |
| 1671   | Gregory Arctan の無限級数発見                                       | 1981 | 三好, 金田 2,000,036 FACOM M-200 *K         |
| 1674   | Leibnitz $\pi$ を Arctan の無限級数で表す                             | 1982 | 田村, 金田 8,388,576 HITAC M-28011 *GL      |
| 1705   | Sharp 72 桁計算   | 1983 | 金田, 吉野, 田村 約 1670 万 "                   |
| 1706   | Machin 100 桁計算   | 1986 | ベイリー 約 29 百万 CRAY-2                     |
| 1706   | Jones 円周率を記号 $\pi$ で表す                                       | 1986 | 金田, 田村 約 67 百万 HITAC S-810/20 *GL       |
| 1719   | de Lagny 127 桁計算 (113 桁目にミス)                                 | 1987 | 金田, 田村, 久保等 約 13 千万 NEC SX-2 *GL        |
| 1722   | 建部賢弘 41 桁  | 1988 | 金田, 田村 約 2 億 HITAC S-820/80 *GL         |
| 1739   | 松永良弼 50 桁  | 1989 | チュドノフスキー兄弟 約 5 億 IBM3090                |
| 1766   | Lambert $\pi$ が無理数であることを証明                                   | 1989 | 金田, 田村 約 5 億 HITAC S-820/80 *GL         |
| 1794   | Vega 140 桁   | 1989 | チュドノフスキー兄弟 約 10 億 IBM3090               |
| 1844   | Dase 200 桁   | 1989 | 金田, 田村 1,073,741,799 HITAC S-820/80 *GL |
| 1877   | Clausen 248 桁  | 1990 | 若松 1,000,118 FM-TOWNS (パソコン) *S         |
| 1853   | Rutherford 440 桁   |      |   |
| 1855   | Richter 500 桁  |      |   |
| 1873/4 | Shanks 707 桁 (527 桁目にミス)                                     |      |   |
| 1882   | Lindemann $\pi$ が超越数であることを証明                                 |      |   |

ここで, \*M: Machin の公式, \*S: シュテルマーの公式, \*G: Gauss の公式, \*K: クリンゲンシェルナの公式, \*GL: Gauss-Legendre の公式