解析 I 演習問題

'92　若林

I．数列（復習）

1.　実数の性質 "上に有界な実数の集合（ $\mathbf{R}$ の部分集合) は上限を持つ" を認めて，Archimedes の公理 "$\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{Z}$ s.t. $x < n$" を示せ．但し，

・ $A(\subset\mathbf{R})$ が上に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M \in\mathbf{R}$ s.t. "$a \in A \Rightarrow a \leq M$"

このとき，上の M を A の上界と呼ぶ．

・ $\alpha \in\mathbf{R}$ が $A(\subset\mathbf{R})$ の上限 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ α は A の上界の中で最小のもの

　$\Longleftrightarrow$ (i) $a \in A \Rightarrow a \leq \alpha$ (ii) $\forall\varepsilon > 0, \exists a \in A$ s.t. $a > \alpha - \varepsilon$

　このとき，α を $\sup A$ と表わす．

・$\mathbf{Z}= \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$: 整数全体

2.　$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\}$ のとき，$\sup A = 1$ を示せ．

3.　$a_n = 1 + \frac{2}{n}$ ($n = 1, 2, \cdots$) のとき，数列 $\{a_n\}$ が 1 に収束することを定義に戻って示せ．但し，$\{a_n\}$ が a に収束する（ $a_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$)) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ s.t. "$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$"

4. 数列 $\{a_n\}$ に対して $a_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$), $a_n \longrightarrow b$ ($n \to \infty$) ならば， $a = b$ であることを示せ．

5.　(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a < b + \varepsilon$ ならば， $a \leq b$ であることを示せ．

(ii)　$a_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$), $b_n \longrightarrow b$ ($n \to \infty$) かつ $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) ならば，$a \leq b$ であることを示せ．

6.　$a_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$) ならば $|a_n| \longrightarrow |a|$ ($n \to \infty$) を示せ．

7.　問 1 の実数の性質を認めて次を示せ．

(i) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ （ *i.e.* $\{a_n\}$ が単調増加列）かつ $\{a_n\}$ が上に有界（ *i.e.* $\exists M \in\mathbf{R}$ s.t. $a_n \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots$)）ならば $\{a_n\}$ は収束する．

(ii) $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ が Cauchy 列である（*i.e.* $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ s.t. "$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$"）

8. 数列 $\{a_n\}$ に対して $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) とおく． A_1 が上に有界であるとき $b_n = \sup A_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) とおけば， $\{b_n\}$ は収束するかまたは $-\infty$ に発散することを示せ．

注）この $\{b_n\}$ の極限（ $-\infty$ を込めて）を $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と表わし， $\{a_n\}$ の上極限と呼ぶ． A_1 が上に有界でないとき $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ と定義する．同様に A_1 が下に有界であるとき $c_n = \inf A_n$ とおいて， $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ を $\{a_n\}$ の下極限と呼ぶ． A_1 が下に有界でないとき， $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定義する．

9. $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ とする．そのとき次を示せ.
(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. "$n \geq N \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon$"
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n$ s.t. "$n \geq N$ かつ $\alpha - \varepsilon < a_n$"
また $\beta = \liminf_{n\to\infty} a_n$ のとき，(i), (ii) に対応する性質を与えよ.

10. $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$), $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) ならば， $c_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$) を示せ.

11. $a_n \longrightarrow a$ ($n \to \infty$) $\Longleftrightarrow a = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$
を示せ.

12. $|r| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であることを示せ.

13. 次の極限を計算せよ.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!}$ ($r \in \mathbf{R}$) (ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n}$

14. 次の極限を計算せよ.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n(n+1)(n+2)}$ (ii) $\lim_{n\to\infty} (3^n + 2^n)^{1/n}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r^n + r^{-n}}$ ($r > 0$)

II．級数

1. 級数の収束の定義に戻って $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \dfrac{1}{1-r}$ ($|r| < 1$) を示せ．但し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が s に収束する $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} s_n = s$ (ここで $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, s_n を第 n 部分和という).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は
$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. "$n \geq m \geq N \Rightarrow |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$"
(*i.e.* $\{s_n\}$ が Cauchy 列) であることを示せ.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ が発散する（収束しない）ことを示せ.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することを示せ (このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するという).

5. $\{a_n\}$ が 0 に収束しなければ， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することを示せ.

6. 次の級数が収束するならば，和を求めよ.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin nx$ ($x \in \mathbf{R}$)

7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とし， $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は $\{s_n\}$ が上に有界であることを示せ (問 I-7 (i) を用いてよい)．但し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$)

8. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を正項級数とし，

$\exists n_0$, $\exists K > 0$ s.t. "$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq K b_n$"

が成立しているとする．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を正項級数とし，

$\exists n_0$ s.t. "$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 0$, $b_n > 0$ かつ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$"

が成立しているとする．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

10 (Cauchy の判定法). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．次を示せ.

(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$

11 (d'Alembert の判定法). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数として，

$\exists n_0$ s.t. "$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 0$"

を満たしているとする．次を示せ.

(i) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$ が発散することを示せ.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}$ が収束することを示せ.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n^2}$ の収束発散を判定せよ.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とし，$x \geq n_0$ で単調減少な連続関数 $f(x)$ (≥ 0) があって $a_n = f(n)$ ($n \geq n_0$) であるとする．次を示せ.

(i) $\lim_{N\to\infty} \int_{n_0}^{N} f(x)\,dx$ ($= \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$) が (有限の値に) 収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) $\int_{n_0}^{N} f(x)\,dx \longrightarrow \infty$ ($N \to \infty$) ならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ は $\alpha > 1$ のとき収束し，$\alpha \leq 1$ のとき発散することを示せ.

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \log n}$ の収束発散を判定せよ.

18. $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) に対して

$a_n = O(b_n)$ ($n \to \infty$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists K \geq 0$, $\exists n_0$ s.t. "$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq K b_n$"

と定義する．$a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) が，ある $A \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ に対して $a_n = 1 + \dfrac{A}{n} + O(\dfrac{1}{n^{1+\delta}})$

($n\to\infty$) (*i.e.* $a_n-1-\dfrac{A}{n}=O(\dfrac{1}{n^{1+\delta}})$ ($n\to\infty$)) を満たせば，$\dfrac{1}{a_n}=1-\dfrac{A}{n}+O(\dfrac{1}{n^{1+\delta}})$ ($n\to\infty$) であることを示せ.

19 (Gauss の判定法). 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が，ある番号 n_0 があって，$a_n>0$ ($n\geq n_0$) を満たすとする．さらに，ある $\lambda\in\mathbf{R},\delta>0$ があって，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{\lambda}{n}+O(\dfrac{1}{n^{1+\delta}})$ ($n\to\infty$) を満たすとする．そのとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するための必要十分条件は，$\lambda>1$ であることを示せ.

20. 次の級数の収束発散を判定せよ.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^3}$　　(ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\log n)^s}$　($s>0$)

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-n}$　　(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$

21. $\lim_{n\to\infty}[(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})-\log n]$ が存在することを示せ．この極限は Euler の定数と呼ばれ，$\gamma=0.5772156\cdots$ である.
Hint: $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ とおいて，$a_n\geq0$ かつ $\{a_n\}$ は単調減少になることを示せ.

22. $a\in\mathbf{R}$ に対して $a_+=\max\{a,0\}$, $a_-=\max\{-a,0\}$ と定義する．($a_+,a_-\geq0$ かつ $a=a_+-a_-$, $|a|=a_++a_-$ に注意)．このとき，次を示せ.

(i)　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束する $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-$ が収束する
さらに，このとき，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_++\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-$ である.
(ii)　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が条件収束する（ *i.e.* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するが絶対収束しない）ならば，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-$ は発散する.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するならば，数列 $\{a_n\}$ を並べかえた数列 $\{b_n\}$ に対して（ *i.e.* "$\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists!m\in\mathbf{N}$ s.t. $b_n=a_m$" かつ "$\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists!m\in\mathbf{N}$ s.t. $a_n=b_m$" ），$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ は絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ であることを示せ．ここで $\exists!m\in\mathbf{N}$ は $m\in\mathbf{N}$ が唯一つ存在することを意味する.
注) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が条件収束するときは，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ における項の順序を適当にかえるとその級数の和が任意の実数及び $\pm\infty$ に等しくなるようにできる.

24. $\{a_n\}$ は各項が正である単調減少数列であって，$a_n\longrightarrow0$ ($n\to\infty$) ならば，交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ が収束し，$a_1-a_2\leq\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\leq a_1$ であることを示せ (Leibniz の定理).

25. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が絶対収束するならば，すべての積 a_mb_n ($m,n=1,2,\cdots$) を適当に並べてできる級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=(\sum_{n=1}^{\infty}a_n)(\sum_{n=1}^{\infty}b_n)$ であることを示せ.

注) 特に $\alpha_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$ ($n = 1, 2, \cdots$) とおいて $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ は絶対収束し， $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ である．この $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ を Cauchy の積級数という．

26. 次の級数の収束発散を判定せよ．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{(2n-1)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

27. 二重級数 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が収束するならば，$a_{mn} \longrightarrow 0$ ($m, n \to \infty$) であることを示せ．ここで， $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が s に収束する $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ s.t. "$m, n \geq N \Rightarrow |s - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}| < \varepsilon$"
注) $a_{11} = -1$, $a_{1n} = n - 1$ ($n = 2, 3, \cdots$), $a_{21} = 1$, $a_{2n} = -n + 1$ ($n = 2, 3, \cdots$), $a_{m1} = m - 1$ ($m = 3, 4, \cdots$), $a_{m2} = -m + 1$ ($m = 3, 4, \cdots$), $a_{mn} = 0$ ($m \geq 3$, $n \geq 3$) とすると，$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ は 0 に収束するが，例えば $a_{1n} \longrightarrow \infty$ ($n \to \infty$) である．

28. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が s に収束し，さらに各 $m = 1, 2, \cdots$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ が r_m に収束するならば， $\sum_{m=1}^{\infty} r_m$ も収束し， $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} r_m$ であることを示せ．

29. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が収束するための必要十分条件は $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ s.t. "$p \geq m \geq N$, $q \geq n \geq N \Rightarrow |s_{pq} - s_{mn}| < \varepsilon$" であることを示せ．ここで $s_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}$ とおいた．

30. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が絶対収束する（*i.e.* $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ が収束する）ならば， $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ は収束し，$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn})$ が成立することを示せ．

31. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ が絶対収束するための必要十分条件は， $\exists M \geq 0$ s.t. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots$) であることを示せ．

32. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ も収束することを示せ．

33. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおき， $\exists M \geq 0$ s.t. $|s_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots$) であるとし， $\{b_n\}$ は単調減少数列で $b_n \longrightarrow 0$ ($n \to \infty$) ならば， $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ が収束することを示せ．
Hint: Abel の変形法を用いる．

34. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin n\theta}{\log n}$ ($\theta \in \mathbf{R}$) が収束することを示せ．

35. $\sum_{m,n=0}^{\infty}(\dfrac{x}{2})^{m+n}\dfrac{(m+n)!}{m!n!} = \dfrac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$) を示せ．

36. 次の級数の収束発散を判定せよ．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{\theta}{n}$ ($\theta > 0$) (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}a^n$ ($\alpha > 0$, $0 < a < 1$)

(iii) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(m+n)^s}$ ($s > 0$)

37. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，$a_n \longrightarrow 1$ ($n \to \infty$) であることを示せ．ここで，$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が P ($\neq 0$) に収束する $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P_n \longrightarrow P$ ($n \to \infty$) 但し，$P_n = \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n$

注）$P_n \longrightarrow 0$ のときは，0 に発散するといい，ふつう，収束するとは考えない．

38. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が絶対収束する（ *i.e.* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ が収束する）ための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することであることを示せ．

39. $1+a_n \neq 0$ ($n=1,2,\cdots$) のとき，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が絶対収束すれば，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が収束することを示せ．

40. $\{\omega_n\}$ を素数 $2,3,5,7,11,\cdots$ の数列とし，$s>1$ とする．このとき，$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{1}{{\omega_n}^s})$ が絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ に等しいことを示せ．

III．一様収束

1. 区間 I で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ が (区間 I で) 一様収束するための必要十分条件は，$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. “$x \in I,\, m, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$” である．ここで
$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に（区間 I で）一様収束する
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. “$x \in I,\, n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$”.

2. 区間 I で定義された連続関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ も (I で) 連続であることを示せ．

3. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ($n=1,2,\cdots$) として，$\{f_n(x)\}$ が区間 $[0,2]$ において一様収束しないことを示せ．

4. $f_n(x) = x^n$ ($n=1,2,\cdots$) として，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ (*i.e.* $0 < \varepsilon < 1$) に対して $\{f_n(x)\}$ が区間 $[0, 1-\varepsilon]$ 上一様収束することを示せ．また，$\{f_n(x)\}$ が区間 $[0,1]$ 上一様収束しないことを示せ．

5. 次の関数列の区間 I での一様収束性を調べよ．

(i) $\{n^{\alpha} x e^{-nx^2}\}$ ($\alpha > 0, I = (-\infty, \infty)$) (ii) $\{nx(1-x)^n\}$ ($I = [0,1]$)

(iii) $\left\{\dfrac{nx}{nx+1}\right\}$ ($I = [1, \infty)$)

6. $a_n(x)$ ($n=1,2,\cdots$) を区間 I で定義された関数とする．$|a_n(x)| \leq c_n$ ($n=1,2,\cdots$, $x \in I$) を満たし，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ は（ I で）絶対かつ一様収束することを示せ．ここで
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ が（ I で）一様収束する
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ ($n=1,2,\cdots$) とおいて $\{s_n(x)\}$ が I で一様収束する
また，
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ が (I で) 絶対収束する

$\overset{def}{\iff}$ 各 $x \in I$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ が収束する

7. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ ($\alpha > 1$) によって定義される関数は，($(-\infty, \infty)$ で) 連続であることを示せ.

8. 次の級数の一様収束性を調べよ.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ ($I = [0, 1]$) (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ ($I = (-\infty, \infty)$)

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + \sin x}$ ($I = [0, 2\pi]$)

9. 有界区間 $I = [a, b]$ で積分可能な関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束するならば，$f(x)$ も積分可能で， $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ が成立することを示せ．ここで，$f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能であることを次のように定義する (但し，$f(x)$ は $[a, b]$ で有界である，*i.e.* $\exists M > 0$ s.t. $|f(x)| \leq M$ ($x \in [a, b]$)，と仮定する)：Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を $[a, b]$ の分割とし， $S_\Delta(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, $s_\Delta(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ と定義する．但し， $M_i \overset{def}{=} \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$, $m_i \overset{def}{=} \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$ とおく．分割 Δ をかえたときの $S_\Delta(f)$ の下限を $S(f)$，$s_\Delta(f)$ の上限を $s(f)$ とする（ともに存在する）．そのとき，$f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能 $\overset{def}{\iff} S(f) = s(f)$．このとき $\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} S(f)$ ($= s(f)$) とかく.
注） $f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能 $\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\Delta$: $[a, b]$ の分割 s.t. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ この事実を使ってよい.

10. 有界区間 $I = [a, b]$ で定義された連続微分可能な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で $f(x)$ に各点収束し（ *i.e.* 各 $x \in I$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ ($n \to \infty$)), $\{f_n'(x)\}$ が I で $g(x)$ に一様収束しているならば， $\{f_n(x)\}$ も $f(x)$ に I で一様収束し，かつ $f(x)$ は連続微分可能で $f'(x) = g(x)$ であることを示せ．ここで $f(x)$ が連続微分可能とは，$f(x)$ が微分可能でその導関数が連続であることを意味する.

11. $a_n(x), \lambda_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) を区間 I で定義された関数とし， $|\sum_{k=1}^{n} a_n(x)| < M$ ($n = 1, 2, \cdots, x \in I$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x) - \lambda_{n+1}(x)|$ が I で一様収束し， $\{\lambda_n(x)\}$ が I で 0 に一様収束すれば，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) a_n(x)$ は I で一様収束することを示せ (Dirichlet の判定条件).

12. $\alpha > 0$ のとき， $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ は任意の $\delta > 0$ に対して区間 $[\delta, 2\pi - \delta]$ で一様収束することを示せ.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ は $[0, 1]$ で $\log(1 + x)$ に一様収束することを示せ.

14. $a_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) は $[a, \infty)$ で定義されていて，任意の $b > a$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ が有界区間 $[a, b]$ で $s(x)$ に一様収束し，広義積分 $\int_a^{\infty} a_n(x)\,dx$ ($= \lim_{M\to\infty} \int_a^M a_n(x)\,dx$) が収束（存在）すると仮定する．さらに，$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \exists M_0 > a$ s.t. "$n \geq N$, $M_2 > M_1 \geq M_0 \Rightarrow |\int_{M_1}^{M_2} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,dx| < \varepsilon$" が成立すれば，広義積分 $\int_a^{\infty} s(x)\,dx$ が収束

し， $\int_a^\infty s(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty a_n(x)\,dx$ であることを示せ．
注) 上と同様，$a_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) が $[a, b)$ で定義されていて，任意の β ($a < \beta < b$) に対して， $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ が $[a, \beta]$ で $s(x)$ に一様収束し，広義積分 $\int_a^b a_n(x)\,dx$ ($= \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta a_n(x)\,dx$) が収束 (存在) し，さらに，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\exists \beta_0 > a$ s.t. "$n \geq N$, $b > \beta_2 > \beta_1 \geq \beta_0 \Rightarrow |\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sum_{k=1}^n a_k(x)\,dx| < \varepsilon$" が成立すれば，広義積分 $\int_a^b s(x)\,dx$ は収束し， $\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b a_n(x)\,dx$ である．

15. $a_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) は $[a, \infty)$ で定義されていて， $[a, \infty)$ の任意の有界区間で積分可能であるとする．任意の $b > a$ に対して， $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ が $[a, b]$ で $s(x)$ に一様収束すると仮定する．次を示せ．

(i) 広義積分 $\int_a^\infty |a_n(x)|\,dx$ が収束し，$\sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty |a_n(x)|\,dx$ が収束すれば，$\int_a^\infty s(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty a_n(x)\,dx$ （両辺は収束）．
(ii) $|\sum_{k=1}^n a_n(x)| \leq M(x)$ ($n = 1, 2, \cdots,\ x \geq a$) かつ $\int_a^\infty M(x)\,dx$ が収束するような関数 $M(x)$ が存在すれば，$\int_a^\infty s(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty a_n(x)\,dx$ （両辺は収束）．

16. ２変数の関数 $f(x, y)$ が $D = \{(x, y);\ a \leq x < b,\ c \leq y \leq d\}$ で定義されていてそこで連続で（但し， $b = \infty$ を許す）， $c \leq y \leq d$ なる任意の y に対して，$F(y) = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x, y)\,dx$ ($= \int_a^b f(x, y)\,dx$ とかく) が存在するとする．さらに，$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ が $c \leq y \leq d$ で一様収束するとする（*i.e.* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_0 \in (a, b)$ s.t. "$b_0 < \beta < b$, $y \in [c, d] \Rightarrow |\int_\beta^b f(x, y)\,dx| < \varepsilon$" ）．このとき， $F(y)$ は $c \leq y \leq d$ で連続で，$\int_c^d (\int_a^b f(x, y)\,dx) dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\,dy) dx$ が成立することを示せ．但し， $a \leq \beta < b$ なる β を１つきめて， $G(y) = \int_a^\beta f(x, y)\,dx$ とおくとき， $G(y)$ が $c \leq y \leq d$ で連続で $\int_c^d (\int_a^\beta f(x, y)\,dx) dy = \int_a^\beta (\int_c^d f(x, y)\,dy) dx$ が成立することを既知とする．

17. ２変数の関数 $f(x)$ が $D = \{(x, y);\ a \leq x < b,\ c \leq y \leq d\}$ で定義されていて（但し，$b = \infty$ を許す）， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ が D で存在して連続で， $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$ が $c \leq y \leq d$ で一様収束するとする． $c \leq y \leq d$ に対して $\int_a^b f(x, y)\,dx$ が存在すれば，微分可能で（ y について） $\displaystyle\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$ であることを示せ．

18. $a > 0$ として $\displaystyle I(y) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(yx)}{x}\,dx$ とおく（収束は明らか）．次を示せ．

(i) 任意の $c < d$ に対して，$I(y)$ が $c \leq y \leq d$ で一様収束する (*i.e.* $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_0 > \exists \alpha_0 > 0$ s.t. "$c \leq y \leq d$, $0 < \alpha < \alpha_0$, $\beta > \beta_0 \Rightarrow \displaystyle|\int_0^\alpha e^{-ax} \frac{\sin(yx)}{x}\,dx| + |\int_\beta^\infty e^{-ax} \frac{\sin(yx)}{x}\,dx| < \varepsilon$").
(ii) 任意の $c < d$ に対して $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(yx)\,dx$ が $c \leq y \leq d$ で一様収束する．
(iii) $I(y) = \mathrm{Tan}^{-1}(y/a)$
(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

19. $\int_0^\infty \cos x\ e^{-x^2}\,dx$ を求めよ．

20. $\log 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ を示せ.

IV．整級数 (べき級数)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ がある $x = x_0$ で収束すれば, $|x| < x_0$ なる x に対して絶対収束し，さらに，任意の ρ ($0 < \rho < |x_0|$) に対して, $[-\rho, \rho]$ で一様収束することを示せ.

2. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して $1/r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおけば（但し $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ と考える）, $|x| < r$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束し, $|x| > r$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が発散することを示せ.
注）上の r を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と呼ぶ.

3. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$ が存在する（ $L = 0, \infty$ を許す）ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $1/L$ であることを示せ.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とすると，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も r で, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < r$) とおくとき, $f(x)$ は微分可能で $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ であることを示せ.

5. 次の整級数の収束半径を求めよ.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n-1}$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!} x^{2n+1}$ (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} x^n$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)

注） $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ と定義する．但し $\dbinom{\alpha}{0} = 1$ と定義する. $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ のとき, $\dbinom{\alpha}{n} = 0$ ($n > \alpha$) である.

6. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とし, $r \neq 0, \infty$ と仮定する. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が収束するならば，$\lim_{x\to r-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ であることを示せ（ Abel の定理）.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ の収束半径を r (> 0) とし, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ が $|x| < \rho$ で絶対収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n < r$ ($|x| < \rho$) を満たすならば, y に $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ を代入して得られる形式的整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は $|x| < \rho$ で絶対収束し, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ ($|y| < r$), $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ($|x| < \rho$) とおけば, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(g(x))$ ($|x|, \rho$) であることを示せ.
注） $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)^m$ を並べかえて，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ とかいた. $c_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_n^{(m)}$, $b_n^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}^{(m)} b_k$ ($m = 0, 1, \cdots$), $b_n^{(0)} = 0$ ($n \neq 0$), $b_0^{(0)} = 1$ によって形式的に $\{c_n\}$ が定義される．問７では $\sum_{m=0}^{\infty} a_m b_n^{(m)}$ が収束することも主張している.

8. Gauss の超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} x^n$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \gamma \neq 0, -1, -2, \cdots$) の収束半径 r を求めよ．但し, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ ($n > 0$), $(\alpha)_0 = 1$ である．さらに, $|x| < r$ に対して, $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ が微分方程式 $x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha +$

$\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$ を満たすことを示せ.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ ($|x|<1$) を示せ.

10. $y'' - xy = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$ を満たす y を x の整級数として求めよ．またその収束半径を求めよ.

11. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $|x| < r$ で収束するとする． $a_0 \neq 0$ ならば，ある $\rho > 0$ に対し $|x| < \rho$ で $1/f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と表わせることを示せ．さらに，c_0, c_1, c_2 を $\{a_n\}$ で表わせ.

12. 次の関数を Maclaurin 級数（ 0 を中心とする Taylor 級数）に展開せよ．またその級数の収束半径を求めよ.

(i) $\sin x$　(ii) $(1+x)^{\alpha}$　($\alpha \in \mathbf{R}$)　(iii) $\log(1+x)$
(iv) $\mathrm{Tan}^{-1}\, x$　(v) $(1-x-2x^2)^{-1}$

V．積分

1. 与えられた空間曲線 C に沿っての線積分 $\displaystyle\int_C (2xdx + zdy + ydz)$ を計算せよ.

(1) C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^4$　($0 \leq t \leq 1$)

(2) C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$　($0 \leq t \leq 1$)

(3) C: 2 点 $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ を結ぶ線分

(4) C: 折線 $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$

・C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$　($a \leq t \leq b$) ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ は C^1 級) のとき，連続関数 f, g, h に対して

$$\begin{aligned}&\int_C (f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz)\\ &= \int_a^b \Big(f(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}(t) + g(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}(t) + h(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}(t)\Big)dt\end{aligned}$$

と定義する．このとき，C は向き付けられていると考えている．すなわち，C 上を $(x(a), y(a), z(a))$ から $(x(b), y(b), z(b))$ に向かう方向を正の向きと考える．また，上の定義は C の表し方に依存しないことを示すことができる (但し同じ向き付けを与える C の表現のみで考える．問 2 参照).

2. $C: x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$　($a \leq t \leq b$) ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ は C^1 級) とし，$\varphi(t)$ は $c \leq t \leq d$ で定義された C^1 級の関数で，$\varphi'(t) > 0$, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ を満たすとする．このとき，連続関数 f に対して

$$\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt = \int_c^d f(x(\varphi(t)),y(\varphi(t)),z(\varphi(t)))\frac{d}{dt}x(\varphi(t))\,dt$$

を示せ.

3. $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ (0\le t\le 2\pi)$ のとき, 次を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_C z\,dx$ (2) $\displaystyle\int_C ds$

・C: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ \ (a\le t\le b)$ ($x(t),\ y(t),\ z(t)$ は C^1 級) のとき, 連続関数 $f(x,y,z)$ に対して

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

と定義する. 特に, $\displaystyle\int_C ds$ は曲線 C の長さに等しい.

4. C を x,y-平面上の原点を中心とする半径 1 の円とする (但し, C を反時計方向に一周する向きを正とする). 次を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{x^2+y^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_C x\,dy$

・x,y-平面上の (単一) 閉曲線 C は平面を 2 つの領域に分ける. 有界な領域を内部, 他方を外部という. 普通平面上の閉曲線 C に対して, C 上を動くとき, 上からみて内部を左手にみる方向を正の向きと考える.

5. C を x,y-平面上の原点を中心とする半径 1 の円とする (但し, C を反時計方向に一周する向きを正とする). 整数 n に対して,

$$\int_C \{(x+iy)^n dx + i(x+iy)^n dy\}$$

を計算せよ. ここで例えば 実数値関数 $f,\ g$ に対して,

$$\int_C (f(x,y)+ig(x,y))dx=\int_C f(x,y)dx+i\int_C g(x,y)dx$$

と定義する.

6. 3 次元空間内の滑らかな曲面 F: $x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\ \ (\ (u,v)\in D$: $\mathbf{R}^2$ の領域) に対して, 連続関数 $f(x,y,z)$ の面積分 $\displaystyle\int_F f(x,y,z)dS$ は

$$\int_F f(x,y,z)dS=\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\Delta(u,v)}\,dudv$$

で定義される. ここで, $\Delta(u,v)=\left(\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2$, 例えば, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\partial y/\partial u & \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v\end{pmatrix}$ である. 上の定義は曲面 F の表し方に依存しないことを示すことができる.

(1) F: $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 \le 1$ 　($x=u$, $y=v$, $z=u^2+v^2$ 　($(u,v) \in D \equiv \{(u,v);$ $u^2+v^2 \le 1\}$) と考えればよい) のとき，$\displaystyle\int_S \sqrt{4z+1}\,dS$ を計算せよ．

(2) F: $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$, $x^2+y^2 \le 1$ のとき，$\displaystyle\int_F z\,dS$ を計算せよ．

7. S を3次元空間内の滑らかな曲面とし，$P=(x_0,y_0,z_0)$ を S 上の点とする．S が次のように与えられているとき，P における S の単位法線ベクトル及び接平面の方程式を求めよ．

(1) S: $F(x,y,z)=0$ 　(但し，$F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_x(x_0,y_0,z_0)^2+F_y(x_0,y_0,z_0)^2+F_z(x_0,y_0,z_0)^2 \ne 0$ を仮定する．)

(2) S: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ 　($(u,v) \in D$: $\mathbf{R}^2$ の領域), (但し，$x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $z_0=z(u_0,v_0)$, $(u_0,v_0) \in D$, $\Delta(u,v)$ を 問 6 のものとして，$\Delta(u_0,v_0) \ne 0$ を仮定する．)

8. $S: x=u$, $y=v$, $z=1+u^2+v^2$ のとき，S 上の点 $(1,1,3)$ における S の単位法線ベクトル及び接平面の方程式を求めよ．

9. S を3次元空間内の滑らかな向き付けられた曲面とする．(S が向き付けられているとは，S の各点 (x,y,z) に対して単位ベクトル $\mathbf{n}(x,y,z)=(n_1(x,y,z),n_2(x,y,z),n_3(x,y,z))$ を対応さす連続関数が定義されていて，S の各点 (x,y,z) で $\mathbf{n}(x,y,z)$ が S の法線ベクトルになっている．このとき，各 $(x,y,z) \in S$ に対して $\mathbf{n}(x,y,z)$ を正の向きの単位法線ベクトルと呼ぶことにする．)

$$\begin{aligned}
\int_S f(x,y,z)dxdy &= -\int_S f(x,y,z)dydx := \int_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)dS \\
\int_S f(x,y,z)dydz &= -\int_S f(x,y,z)dzdy := \int_S f(x,y,z)n_1(x,y,z)dS \\
\int_S f(x,y,z)dzdx &= -\int_S f(x,y,z)dxdz := \int_S f(x,y,z)n_2(x,y,z)dS
\end{aligned}$$

と定義する．次の面積分を計算せよ．

(1) S: $z=1-x-y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 1$
(S の正の向きの法線ベクトルの z 成分は正であるとする．)

$$\int_S xdxdy$$

(2) S: $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$, $x^2+y^2 \le 1$
(S の正の向きの法線ベクトルの z 成分は非負であるとする．)

$$\int_S zdxdy$$

・上の $\int\cdots dxdy$ を今までの重積分と区別するために $\int\cdots dx\wedge dy$ と書くこともある．
$\Rightarrow$ 厳密な議論をするためには多様体及び微分形式を学ぶ必要がある．

10. $S: x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$ ($(u,v)\in D$: $\mathbf{R}^2$ の領域) として，$\Delta(u,v)$ を 問 6 で定義されたのものとして，$\Delta(u,v)\neq 0$ ($(u,v)\in D$) が満たされていると仮定する．特別に S の向き付けが指定されていないとき，S は単位法線ベクトル $\mathbf{n}(x,y,z)=\left(\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big/\sqrt{\Delta(u,v)}, \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big/\sqrt{\Delta(u,v)}, \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big/\sqrt{\Delta(u,v)}\right)$ を正の向きとするように向き付けられていると考える．このとき，

$$\int_S f(x,y,z)dxdy=\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv$$
$$\int_S f(x,y,z)dydz=\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv$$
$$\int_S f(x,y,z)dzdx=\int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv$$

であることを示せ．ここで，右辺の積分は普通の重積分である．

11. $S: x=u,\, y=v,\, z=1+u^2-v^2$ ($u^2+v^2\leq 1$) のとき，次を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_S z\,dxdy$ (2) $\displaystyle\int_S x\,dydz$

12. S を３次元空間の滑らかな閉曲面とする．閉曲面は空間を２つの領域に分け，有界でない領域を外部，他方を内部と呼ぶ．普通， S の外向き法線ベクトル (S から外部に向かう法線ベクトル) を正の向きとするように S は向き付けられていると考える．S: $x^2+y^2+z^2=1$ とする．次を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_S z\,dxdy$ (2) $\displaystyle\int_S (x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dzdy)$

・ Gauss の定理: S の内部を V とするとき，

$$\int_S (f(x,y,z)dxdy+g(x,y,z)dydz+h(x,y,z)dzdx)$$
$$=\int_V (f_z(x,y,z)+g_x(x,y,z)+h_y(x,y,z))dxdydz$$

13. V を内部とする３次元空間の滑らかな閉曲面を S とし，S の各点 (x,y,z) における外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}(x,y,z)$ とする．

(1) 問 12 で注意として与えた形の Gauss の定理より，ベクトル値関数 $\mathbf{v}(x,y,z)$ ($=(v_1(x,y,z),\, v_2(x,\,y,\,z), v_3(x,y,z)$) に対して，

$$\int_V \operatorname{div}\,\mathbf{v}(x,y,z)\,dxdydz=\int_S \mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS$$

を示せ．ここで， $\operatorname{div}\,\mathbf{v}(x,y,z)=v_{1x}(x,y,z)+v_{2y}(x,y,z)+v_{3z}(x,y,z)$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を表わす.

(2) $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\ \mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS=0$ 　を示せ．ここで，$\mathrm{rot}\ \mathbf{v}(x,y,z)=(v_{3y}-v_{2z}, v_{1z}-v_{3x}, v_{2x}-v_{1y})$ である．

(3) $f(x,y,z)$ が C^2 級であるとき，

$$\int_V \Delta f(x,y,z)dxdydz=\int_S \mathrm{grad}\ f(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS$$

を示せ．ここで，$\Delta f=\partial^2 f/\partial x^2+\partial^2 f/\partial y^2+\partial^2 f/\partial z^2$, $\mathrm{grad}\ f=(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ である．

14. C を平面上の滑らかな (単一) 閉曲線として，その内部を D とする．このとき，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_C (xdy-ydx)$ が D の面積に等しいことを示せ．

・ Green の定理:

$$\int_C (f(x,y)dx+g(x,y)dy)=\int_D (-f_y(x,y)+g_x(x,y))dxdy$$

15. $f(x,y)$, $g(x,y)$ は滑らかで $f_y(x,y)=g_x(x,y)$ を満たすとき，次を示せ．

(1) C_j ($j=1,2$) を $(0,0)$ と (x_0,y_0) を結ぶ滑らかな曲線とする (但し，$(0,0)$ から (x_0,y_0) に向かう方向を正の向きとする)．このとき，

$$\int_{C_1} (f(x,y)dx+g(x,y)dy)=\int_{C_2} (f(x,y)dx+g(x,y)dy)$$

(2) $F_x(x,y)=f(x,y)$, $F_y(x,y)=g(x,y)$ を満たす $F(x,y)$ が存在する．

16. S を 3 次元空間内の滑らかな向き付けられた曲面とし (S 上の正の向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}(x,y,z)$ が指定されている．また S の表，裏が定まっているともいえる．このとき，裏から表へ向かう方向の単位法線ベクトルが $\mathbf{n}(x,y,z)$)，S の境界 (縁) である閉曲線を C とし， C が滑らかな（単一）閉曲線であると仮定する． S の表側が上になるように S を変形して平面上の領域に変えたとき，上からみて， C 上を動くとき S を左手にみるような方向を C の正の向きとする． $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ が C^1 級であるとき， Stokes の定理

$$\begin{aligned}&\int_C (f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz)\\&=\int_S \{(h_y-g_z)dydz+(f_z-h_x)dzdx+(g_x-f_y)dxdy\}\end{aligned}$$

を示せ.

17. S を 3 次元空間内の滑らかな向き付けられた曲面とし, $\mathbf{n}(x,y,z)$ を S 上定義された正の向きの単位法線ベクトルとする. S の境界 (縁) である閉曲線を C とし, C が滑らかな (単一) 閉曲線であると仮定する. $\mathbf{t}(x,y,z)$ を $(x,y,z)\in C$ における C の正の向きに向かう単位接ベクトルとする. このとき, 問 16 の形の Stokes の定理 より次を示せ.

(1) C^1 級の関数 f に対して,

$$\int_C f(x,y,z)\mathbf{t}(x,y,z)\,ds = -\int_S (\mathrm{grad}\ f(x,y,z)) \times \mathbf{n}(x,y,z)\,dS$$

が成り立つ.

(2) C^1 級のベクトル場 $\mathbf{v}(x,y,z)$ に対して,

$$\int_C \mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{t}(x,y,z)\,ds = \int_S (\mathrm{rot}\ \mathbf{v}(x,y,z))\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS$$

が成り立つ.

A. 微分形式と Stokes の定理 (の覚え方)

Green の定理, Gauss の定理及び Stokes の定理は, (一般化された) Stokes の定理

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

の特別な場合であると考えられる. 多様体及び微分形式についてのきちんとした説明は別にして, Stokes の定理が使えるように必要最低限の解説を与える. 以下簡単のために (x,y,z) の関数 (スカラー場) は $\mathbf{R}^3$ 全体で定義されていて, 何回でも微分可能であると仮定する. 0 次微分形式とは関数のことである.

1 次微分形式: $\omega \equiv f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$ (形式的な記号と考えておく) を 1 次微分形式と呼ぶ.

(1) 和及び関数との積: α, β: 関数, $\eta = g_1dx + g_2dy + g_3dz$ に対して,

$$\alpha\omega + \beta\eta \stackrel{def}{=} (\alpha f_1 + \beta g_1)dx + (\alpha f_2 + \beta g_2)dy + (\alpha f_3 + \beta g_3)dz$$

と定義する. 例えば, $0\cdot dx$ を 0 と書く.

(2) 外微分: f を 0 次微分形式 (関数) とする. そのとき,

$$df \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

によって, 外微分 d を定義する.

2 次微分形式: $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$, $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$, $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$, $dz\wedge dx = -dx\wedge dz$ と約束し, $\omega = f_1(x,y,z)dx\wedge dy + f_2(x,y,z)dy\wedge dz + f_3(x,y,z)dz\wedge dx$ の形で表されるものを 2 次微分形式と呼ぶ. 上の約束より, 例えば, $fdy\wedge dx = -fdx\wedge dy$, $fdy\wedge dy = 0$ である.

(1) 和及び関数との積: α, β: 関数, $\eta = g_1dx\wedge dy + g_2dy\wedge dz + g_3dz\wedge dx$ に対して,

$$\alpha\omega + \beta\eta \stackrel{def}{=} (\alpha f_1 + \beta g_1)dx\wedge dy + (\alpha f_2 + \beta g_2)dy\wedge dz + (\alpha f_3 + \beta g_3)dz\wedge dx$$

と定義する.

(2) 外積: f, g: 関数, $\omega_1 = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, $\omega_2 = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$ に対して,

$$\begin{aligned}
&f \wedge g \overset{def}{=} fg, \qquad f \wedge \omega_1 \overset{def}{=} f\omega_1 \,(= (ff_1)dx + (ff_2)dy + (ff_3)dz) \\
&\omega_1 \wedge f \overset{def}{=} f\omega_1, \\
&\omega_1 \wedge \omega_2 \overset{def}{=} (f_1 g_2 - f_2 g_1)dx \wedge dy + (f_2 g_3 - f_3 g_2)dy \wedge dz \\
&\qquad\qquad +(f_3 g_1 - f_1 g_3)dz \wedge dx)
\end{aligned}$$

(分配法則を用いて形式的に $\omega_1 \wedge \omega_2$ を計算して, 上述の約束を適用して整理した形になっている).

$$\begin{aligned}
&f \wedge \omega \overset{def}{=} f\omega \,(= (ff_1)dx \wedge dy + (ff_2)dy \wedge dz + (ff_3)dz \wedge dx) \\
&\omega \wedge f \overset{def}{=} f\omega
\end{aligned}$$

(3) 外微分: ω_1 を上の (2) のものとして,

$$\begin{aligned}
&d\omega_1 \overset{def}{=} df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz \\
&\Big(= \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)dx \wedge dy + \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big)dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big)dz \wedge dx \Big)
\end{aligned}$$

3 次微分形式: $\omega \equiv f dx \wedge dy \wedge dz$ を 3 次微分形式と呼ぶ ($dx \wedge dx \wedge dy = dy \wedge dx \wedge dy = \cdots = 0$, $dx \wedge dz \wedge dy = dy \wedge dx \wedge dz = dz \wedge dy \wedge dx = -dx \wedge dy \wedge dz$, $dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$ と約束する. すなわち, 例えば同じものが 2 つ以上含まれれば 0. 2 つを交換すればマイナスが付く (例えば, $dz \wedge dy \wedge dx = -dx \wedge dy \wedge dz$)).

(1) 和及び関数との積: α, β: 関数, $\eta = g dx \wedge dy \wedge dz$ に対して,

$$\alpha\omega + \beta\eta \overset{def}{=} (\alpha f + \beta g)dx \wedge dy \wedge dz$$

と定義する.

(2) 外積: h: 関数, $\omega_1 = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, $\omega_2 = g_1 dx \wedge dy + g_2 dy \wedge dz + g_3 dz \wedge dx$ とする. そのとき,

$$\begin{aligned}
&h \wedge \omega \overset{def}{=} h\omega \,(= (hf)dx \wedge dy \wedge dz), \qquad \omega \wedge h \overset{def}{=} h\omega \\
&\omega_1 \wedge \omega_2 \overset{def}{=} (f_1 g_2 + f_2 g_3 + f_3 g_1)dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

(分配法則で形式的に計算したものと一致する).

$$\omega_2 \wedge \omega_1 \overset{def}{=} (f_3 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_3)dx \wedge dy \wedge dz \,(= \omega_1 \wedge \omega_2)$$

(3) 外微分: ω_2 を上の (2) のものとして,

$$\begin{aligned}
&d\omega_2 \overset{def}{=} dg_1 \wedge dx \wedge dy + dg_2 \wedge dy \wedge dz + dg_3 \wedge dz \wedge dx \\
&\Big(= \Big(\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial y}\Big)dx \wedge dy \wedge dz \Big)
\end{aligned}$$

と定義. また $d\omega \overset{def}{=} 0$ ($d\omega$ は 4 次の微分形式であるが, $\mathbf{R}^3$ において考えているので, 4 次の微分形式は 0 のみ).

注) 4 次以上の微分形式は, $\mathbf{R}^3$ では 0 のみである. $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ での微分形式も同様に定義する. また一般に $\mathbf{R}^n$ においても同様である.

微分形式の制限: (1) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ のとき,

$$f = f(x(t), y(t), z(t))$$
$$dx = x'(t)dt, \qquad dy = y'(t)dt, \qquad dz = z'(t)dt$$

と定義し, $\mathbf{R}$ の微分形式と考える ($\mathbf{R}^3$ の微分形式 dx, dy, dz を $\mathbf{R}^3$ 内の曲線: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ に制限したものである). 従って, 例えば $dx \wedge dy = (x'(t)y'(t))dt \wedge dt = 0$.

(2) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ のとき,

$$f = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

と定義し, $\mathbf{R}^2$ の微分形式と考える ($\mathbf{R}^3$ の微分形式 dx, dy, dz を $\mathbf{R}^3$ 内の曲面: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ に制限したものである). 従って, 例えば $dx \wedge dy = (\partial x/\partial u \cdot \partial y/\partial v - \partial x/\partial v \cdot \partial y/\partial u)du \wedge dv \, (= \partial(x, y)/\partial(u, v)\, du \wedge dv)$.

1. 次を示せ.

(1) $d(fg) = g\,df + f\,dg$ (2) $d^2 f\,(= d(df)) = 0$

(3) 1 次微分形式 ω に対して, $d^2\omega = 0$

・ ω が 2 次または 3 次微分形式なら, $\mathbf{R}^3$ においては, $d^2\omega = 0$ は定義より明らか.

2. ω_1, ω_2, η_1, η_2 を 1 次微分形式として, 分配法則

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_1 \wedge \eta_2 + \omega_2 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_2$$

が成立することを示せ.

・ 上の形の分配法則は, ω_1, ω_2 が同じ次数の微分形式で, η_1, η_2 が同じ次数の微分形式なら常に成立する.

3. ω_1, ω_2, ω_3 を 1 次微分形式として, 結合法則

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

が成立することを示せ.

・ 上の形の結合法則は一般に成立する (例えば, ω_1 が 0 次, ω_2 が 2 次, ω_3 が 1 次微分形式でも成立). よって, $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$ を単に $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ と書く.

4. 次を計算せよ (簡単な形で表せ).

(1) $(f\,dx + g\,dy) \wedge dh$ (2) $df \wedge dg$ (3) $df \wedge dg \wedge dh$

5. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ のとき, $\omega \equiv f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$ を $f(t)dt$ の形で表せ.

・ 自然に向き付けられた曲線 C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) に対して ($[a,b]$ の自然な向き付けが C に遺伝する),

$$\int_C \omega \left(= \int_{[a,b]} f(t)\,dt \right) \overset{def}{=} \int_a^b f(t)\,dt$$

(右辺の積分は普通の積分).

6. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ のとき, $\omega \equiv f_1(x,y,z)dx \wedge dy + f_2(x,y,z)dy \wedge dz + f_3(x,y,z)dz \wedge dx$ を $f(u,v)du \wedge dv$ の形で表せ.

・ 自然に向き付けられた曲面 S: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ ($(u,v) \in \Omega$: $\mathbf{R}^2$ の領域) に対して (Ω の自然な向き付けが S に遺伝する. 問 V-10 参照),

$$\int_S \omega \left(= \int_\Omega f(u,v)\,du \wedge dv \right) \overset{def}{=} \int_\Omega f(u,v)\,dudv$$

(右辺の積分は普通の積分). また, 前に $\displaystyle\int_S \omega$ を $\displaystyle\int_S (f_1\,dxdy + f_2\,dydz + f_3\,dzdx)$ と表した.

・ V を $\mathbf{R}^3$ の領域として,

$$\int_V g(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz \overset{def}{=} \int_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

(右辺は普通の積分).

7. Ω を向き付けられた曲面とし, $\partial\Omega$ を Ω の境界 (縁) とし, $\partial\Omega$ は 問 V-16 で述べたように Ω から定まる向きをもつとする. ω を 1 次微分形式とするとき,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega$$

を 問 V-16 の Stokes の定理より導け.

8. Ω を $\mathbf{R}^3$ の有界領域とし, $\partial\Omega$ を Ω の境界とする. $\partial\Omega$ には 問 V-12 で述べたように Ω の外向き単位法線ベクトルを正の単位法線ベクトルとする向きが与えられているとする. ω を 2 次の微分形式とするとき,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega$$

を 問 V-12 の Gauss の定理より導け.

9. $\mathbf{R}^3$ の領域 $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\, x^2 + y^2 < 1$ かつ $|z| < 1\}$ に対し,

$$\int_{\partial V} (z^3\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz)$$

を V 上の積分に直して計算せよ.

10. $\mathbf{R}^3$ の曲面 S: $x = (2 + \cos v) \cos u$, $y = (2 + \cos v) \sin u$, $z = \sin v$ $(\ 0 < u < 3\pi/2$, $0 \leq v < 2\pi)$ に対して，

$$\int_{\partial S} (x\,dx + z\,dy + z\,dz)$$

を，一次元の積分として計算せよ．また，S 上の積分に直して計算せよ．但し，S の点 $(0, 3, 0)$ における正の方向の単位法線ベクトルが $(0, 1, 0)$ であるとする．