逐次近似について

数学分野　　若林　誠一郎

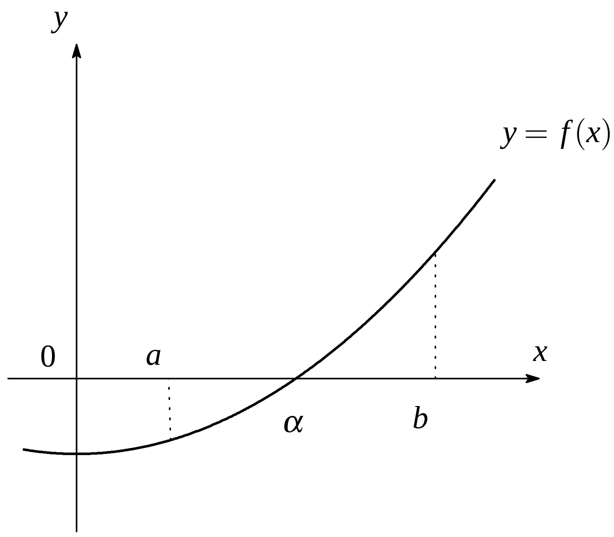
逐次近似法 $\Longrightarrow$ 離散力学系とカオス

1. 関数 (多項式) の零点

$f(x)$ を連続関数として, $f(x)=0$ なる x を求めよう。

例 1.1. $a<b,\ f(a)<0<f(b)$ とする。中間値の定理より

$$\exists\alpha\in(a,b):\ f(\alpha)=0$$



$a_0:=a,\ b_0:=b$ ととって、帰納的に

$$a_{n+1}:=\begin{cases} a_n & \text{if } f(\frac{a_n+b_n}{2})>0, \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{if } f(\frac{a_n+b_n}{2})\le 0, \end{cases} \qquad b_{n+1}:=\begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{if } f(\frac{a_n+b_n}{2})\ge 0, \\ b_n & \text{if } f(\frac{a_n+b_n}{2})<0 \end{cases}$$

$$(\ n=0,1,2,\cdots)$$

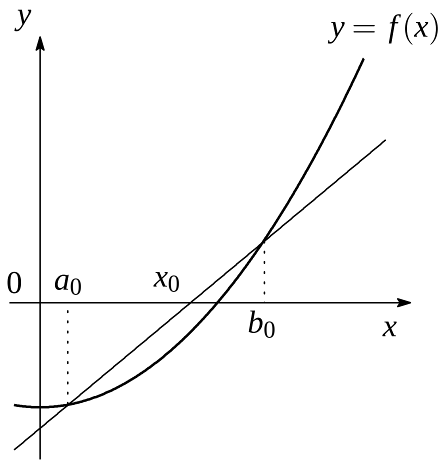
と定義する. そのとき、

$$a=a_0\le a_1\le a_2\le\cdots\le b_2\le b_1\le b_0=b,$$
$$0\le b_n-a_n\le 2^{-n}(b-a),\quad f(a_n)\le 0\le f(b_n)$$

故に $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ で、$f(\alpha) = 0$ となる。

$(\because f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ かつ $f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$)

例 1.2 (はさみうち法). 例 1.1 を少し修正する。



$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad x_0 := \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)},$$

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n & \text{if } f(x_n) > 0, \\ x_n & \text{if } f(x_n) \le 0, \end{cases} \qquad b_{n+1} := \begin{cases} x_n & \text{if } f(x_n) > 0, \\ b_n & \text{if } f(x_n) \le 0, \end{cases}$$

$$x_{n+1} := \frac{a_{n+1} f(b_{n+1}) - b_{n+1} f(a_{n+1})}{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定義する。そのとき、

$$a = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b_0 = b, \quad f(a_n) \le 0 < f(b_n)$$

であり、$\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ は収束し、

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \beta := \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \gamma := \lim_{n\to\infty} x_n$$

とおくと、 $f(\gamma) = 0$ かつ 「$\gamma = \alpha$ or β」が分かる (示せ！)。

例 1.3 (反復法). iterative method

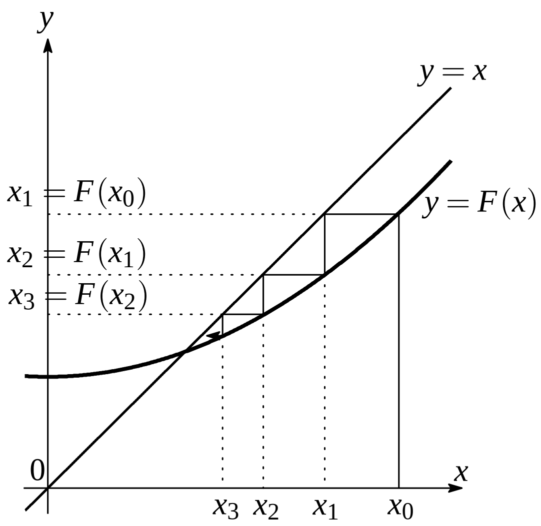
$$f(x) = 0 \iff x = F(x)$$

のとき (例えば $F(x) = x - f(x)$)、

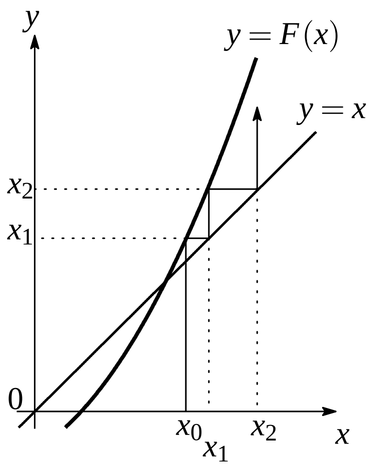
$$x_0\text{: given}, \quad x_{n+1} := F(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおき、数列 $\{x_n\}$ を考える。

$\{x_n\}$ が f の零点に収束するかどうかは、f 及び x_0 に依存する。

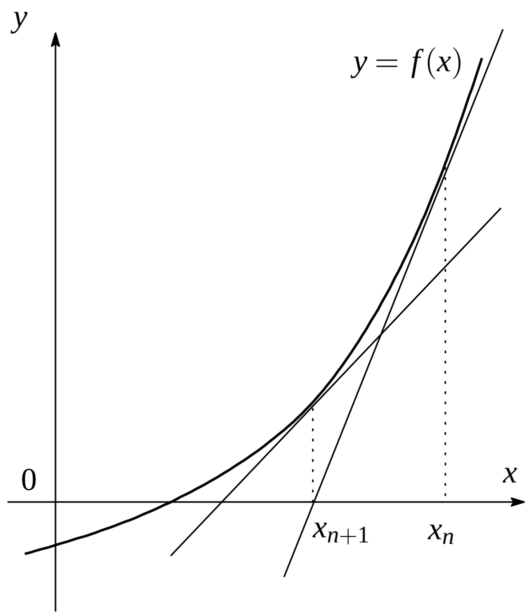


収束



発散

Newton 法: f: 微分可能、$f'(x)\neq 0$ を仮定。



x_0: given に対して $x_{n+1} := x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ($n = 0,1,2,\cdots$) とおく。
($x = x - f(x)/f'(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$)

- $\{x_n\}$ の収束？(f, x_0 についての条件は？)
- x_0 を少し変えたとき、極限はどうなるのか？(安定性)
  $\rightarrow$ 計算誤差の影響は？
- 収束の速さは？

2. 不動点定理 (逐次近似の収束)

X を完備距離空間とする。

距離: $x,y \in X,\ d(x,y)$ (≥ 0): x と y の距離
($d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 及び 三角不等式を満たす)

完備性: $x_1, x_2, \cdots \in X$

$$k > j, \quad d(x_j, x_k) \rightarrow 0 \ (j \rightarrow \infty)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\exists x_0 \in X:\ x_j \rightarrow x_0,\ i.e.,\ d(x_0, x_j) \rightarrow 0 \ (j \rightarrow \infty)$$

Banach の不動点定理: $f\colon X \ni x \mapsto f(x) \in X$ とする。

$0 \le \exists \rho < 1$: $d(f(x), f(y)) \le \rho d(x,y)$ ($\forall x, y \in X$)
(*i.e.*, f が狭義縮小写像) ならば
$\exists! a \in X$: $f(a) = a$ (この a を不動点と呼ぶ)

証明 逐次近似を用いる。 $x_0 \in X$ を 1 つとり、
$x_{n+1} := f(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)
とおく。$k > j$ に対して

$$d(x_j, x_k) \le d(x_j, x_{j+1}) + d(x_{j+1}, x_{j+2}) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)$$
$$\le (\rho^j + \rho^{j+1} + \cdots + \rho^{k-1}) d(x_0, x_1) \le \frac{\rho^j}{1-\rho} d(x_0, x_1) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

X が完備より、$\exists a \in X$: $x_j \to a$ ($j \to \infty$)

$f(a) = a$ なる a が唯一つであること (一意性):

今、$b \in X$, $f(b) = b$ とする。

$$0 \le d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le \rho d(a,b)$$

故に $d(a,b) = 0$ ($\because$ $d(a,b) > 0$ なら $d(a,b) > \rho d(a,b)$). 故に $a = b$

応用: (i) **陰関数定理 (逆写像定理)**

「$f(x,y)$ は偏微分可能で偏導関数が連続 (*i.e.*, C^1 級)。さらに $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \ne 0$ ならば、$x = a$ の近傍で定義された C^1 級関数 φ で $(x,y) = (a,b)$ の近くで "$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$" を満たすものが存在する」

(ii) **反復法の収束**

(iii) **常微分方程式の解の一意存在定理**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{pmatrix} \\ x_j(0) = a_j \quad (1 \le j \le n) \end{cases}$$

これをベクトル記号を用いて

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \\ \vec{x}(0) = \vec{a} \end{cases}$$

と表して、微積分学の基本定理より

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + \int_0^t \vec{f}(s, \vec{x}(s))\, ds$$

となる。$\vec{x}_0(t)=\vec{a}$,

$$\vec{x}_{n+1}(t)=\vec{a}+\int_0^t \vec{f}(s,\vec{x}_n(s))\,ds$$

($n=0,1,2,\cdots$) とおいて、$\{\vec{x}_n(t)\}$ の極限として解 $\vec{x}(t)$ を求める。

(iv) **非線形偏微分方程式 (例)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-\Delta u(t,x)=f(x,u(t,x),\dfrac{\partial u}{\partial t},\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}) \\ u(0,x)=g_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g_1(x) \end{cases}$$

ここで、$\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}(t,x)-\Delta u_m(t,x)=c_{m,0}f(x,u_{m-1},\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial t},\cdots,\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}) \\ u_m(0,x)=g_0(x), \quad \dfrac{\partial u_m}{\partial t}(0,x)=g_1(x) \end{cases}$$

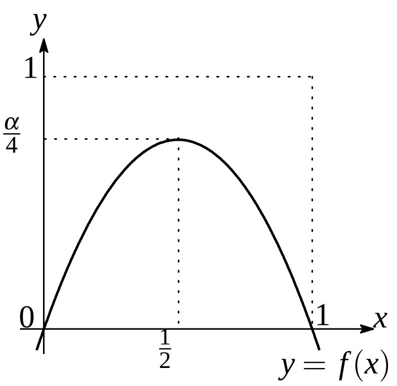
($m=0,1,2,\cdots$) 但し、$c_{0,0}=0$, $c_{m,0}=1$ ($m\neq 0$).

$\{u_m(t,x)\}$ の極限として解 $u(t,x)$ を求める。

2. 離散力学系とカオス discrete dynamical system and chaos

<u>**例**</u> $f(x)=\alpha x(1-x)$

$0\leq\alpha\leq 4$ のとき、$I=[0,1]$ として $f:\ I\ni x\mapsto f(x)\in I$



$$\begin{cases} x_0\in I, \\ x_{n+1}=f(x_n) \quad (n=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

を離散力学系、$\{x_n\}$ (or $x_0,x_1,x_2,\cdots$) を軌道と呼ぶ。

(1) $0\leq\alpha\leq 1$ のとき

$x \in I$ が f の不動点 (*i.e.*, $x = f(x)$) $\quad \Longleftrightarrow x = 0 \quad (\because\ \alpha - 1 \le 0)$

$\{x_n\}$ は単調減少数列で、$x_n \to \exists a$ ($n \to \infty$) となる。a は f の不動点より、$a = 0$ である。

注） $0 \le \alpha < 1$ のときは、Banach の不動点定理が適用できる。

- $1 < \alpha \le 4$ のとき
  $x \in I$ が f の不動点 $\Longleftrightarrow x = 0$ or $1 - \dfrac{1}{\alpha}$

(2) $1 < \alpha \le 3$ のとき

- $x_0 = 0$ or $1 \implies x_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$
- $0 < x_0 < 1 \implies x_n \to 1 - \dfrac{1}{\alpha} \quad (n \to \infty)$

(示せ！ $1 < \alpha \le 2,\ 2 < \alpha < 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2} \le \alpha \le 3$ の 3 つの場合に分けて考える。最後の場合が少し複雑)

***k*-周期 (軌道):**

$\{x_n\}$ が k-周期であるとは、

$$x_j \ne x_0 \quad (1 \le j \le k-1), \qquad x_k = x_0$$

を満たすときをいう。このとき、x_0 (従って x_j $(1 \le j \le k-1)$) を k-周期点と呼ぶ。

$$f^2(x) := f(f(x)),\ f^{n+1}(x) := f(f^n(x))(\ n = 2, 3, \cdots)$$

と定義する。そのとき、

$$x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1) = f^2(x_0),\, \cdots,\, x_n = f^n(x_0),\, \cdots$$

$$f^2(x) = \alpha f(x)(1 - f(x)) = \alpha^2 x(1-x)(1 - \alpha x(1-x)),\ \cdots$$

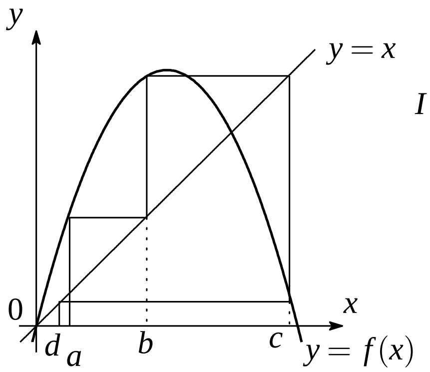
$f^n(x)$ は x の 2^n 次多項式 ($f^8(x)$ は 256 次多項式)

- 2-周期軌道が存在 $\Longleftrightarrow 3 < \alpha\ (\le 4)$
  このとき、f の不動点 $0, 1 - 1/\alpha$ は安定でない。
- 4-周期軌道が存在 $\Longleftrightarrow 1 + \sqrt{6} < \alpha\ (\le 4)$
- 一般に

$$\alpha_0 := 3 < \alpha_1 := 1 + \sqrt{6} < \exists \alpha_2 < \exists \alpha_3 < \cdots < \exists \alpha_\infty = 3.57 \cdots (?) :$$

2^k-周期軌道が存在 $\Longleftrightarrow \alpha_{k-1} < \alpha \ (\leq 4)$
$\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$ では、2^k-周期軌道のみが安定

Li-Yorke の結果:
I: 閉区間, f: $I \to I$: 連続 とする。離散力学系: $x_0 \in I$, $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を考えよう。
定理 $\exists a, b, c, d \in I$: $d \leq a < b < c$, $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$ と仮定する。



$I = [0, 1]$ とした

そのとき

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_0 \in I$: $\{x_n\}$ が k-周期

(ii) $\exists S \subset I$:

(a) S は非可算集合

(b) $x, y \in S, x \neq y$ ならば
$(*)$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$
$(**)$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$

(c) $x \in S, k \in \mathbb{N}, y$ が k-周期点ならば $(**)$ が成立する。

注意 (i) 定理の仮定は、3-周期軌道が存在することと同値。
(ii) 定理の (i), (ii) の性質をもつ力学系は (Li-Yorke の意味で) **カオス的**であると云われる。
(iii) 前の例で $\alpha = 3.627$ で 6-周期軌道が存在 (Li-Yorke)。これより、f^2 に対して Li-Yorke の意味でカオスが起こる。$1 + 2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 4$ のとき、3-周期軌道が存在し、 Li-Yorke の意味でカオスが起こる。

T.-Y. Li and J. A. Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 985–992

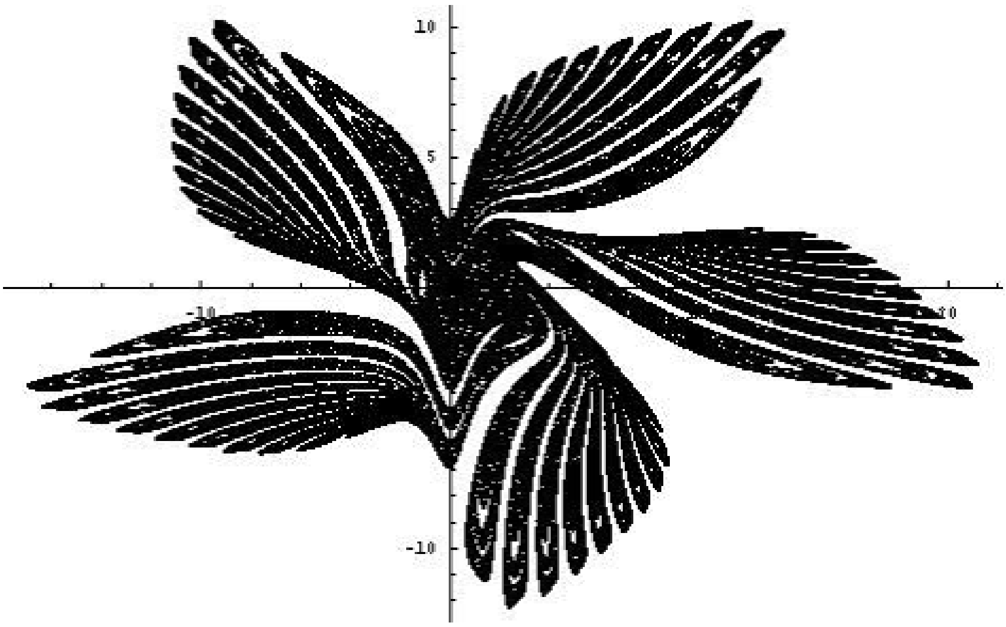
山口昌哉, カオス入門, 朝倉, 1996 年

キーワード: カオス・フラクタル・複雑系

２次元離散力学系の例: Gumowski-Mira 写像

$$\begin{cases} x(n+1) = y(n) + 0.008(1-0.05y^2)y + F(x(n)), \\ y(n+1) = -x(x) + F(x(n+1)), \\ x(0) = 0.1, \quad y = 0.1 \end{cases}$$

ここで, $F(x) = \mu x + 2(1-\mu)x^2/(1+x^2)$ で, 不動点は $(x,y) = (0,0)$, $(1,0)$, $\cdots$ 。下の図は $(x(n),y(n))$ を $n = 300,000$ までの点をプロットしたものである.



$\mu = -0.8$