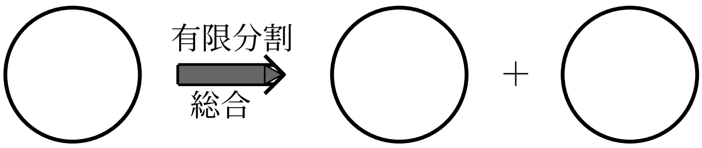
面積・体積って何？
–バナッハ・タルスキーのパラドックス

筑波大学数理物質科学研究科
若林誠一郎

定理 (Banach-Tarski(バナッハ・タルスキー) のパラドックス, 1924):

(1) 球を有限個の小片に分けて, それらをつなぎ合わせて元の球と同じ大きさの球を 2 ヶ再構成できる.



(2) グリーンピースを有限個の小片に分けて, それらをつなぎ合わせて太陽と同じ大きさの球を再構成できる.

◎ 上の定理は質量の保存則に矛盾するか？
(密度が一定なら質量と体積は比例する)
$\Longrightarrow$
体積とは何か？

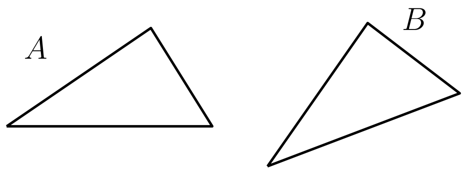
1.　測度

(線分の) 長さ: 数直線 $(= \mathbb{R})$ 上の測度
(平面図形の) 面積: 平面 $(= \mathbb{R}^2)$ 上の測度
(立体の) 体積: 空間 $(= \mathbb{R}^3)$ 上の測度
以下, $\mathbb{R}^2$ 上の測度である面積を考える ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ でも同様).
$A\ (\subset \mathbb{R}^2)$: 平面図形 (平面上の集合), $|A|$: A の面積

$|A|$ の期待される性質:

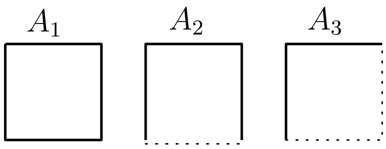
(i) $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して $|A| \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$

(ii) $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $A \equiv B$ (A と B が合同, すなわち, A を平行移動と回転及び裏返しによって B に重ねることができる) ならば, $|A| = |B|$



(iii) $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$ ならば $|A \cup B| = |A| + |B|$

(iv) A が１辺の長さ 1 の正方形ならば, $|A| = 1$. 但し, A がその境界である辺を含む場合も含まない場合も $|A| = 1$



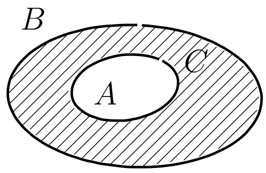
$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 1$

<u>**注意 1**</u>: $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$\because$ $B = A \cup C$, $A \cap C = \emptyset$ より

(i), (iii) によって

$|B| = |A| + |C| \geq |A|$



以上の性質 (i) 〜 (iv) をもつように面積 (測度) を定義しよう.

(I) A が１辺の長さ a (> 0) の正方形のとき

① a が有理数のとき, 自然数 m, n を適当に選んで, $a = \dfrac{m}{n}$ と表せる.

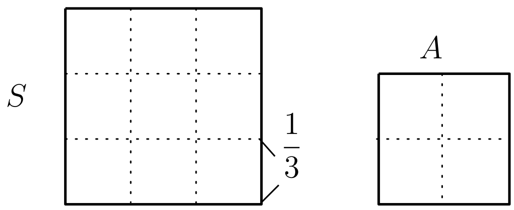
１辺の長さ 1, 中心が原点である正方形を S とする. S の各辺を n 等分すると, S は１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の n^2 個の正方形に分割される. 故に

"１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の正方形の面積" $= 1 \div n^2 = \dfrac{1}{n^2}$

と定める. 同様に A の各辺を m 等分すれば, A は１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の m^2 個の正方形に分割される. よって

$|A| = m^2 \times \dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = a^2$ と定める.

$a = \dfrac{2}{3}$ のとき

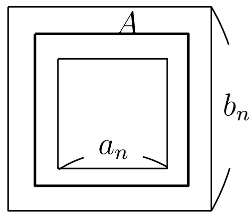


② a が無理数のとき

有理数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a < \cdots < b_3 < b_2 < b_1, \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

を満たすものがとれる (a を有理数で上と下から近似). ここで, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ は $n \to \infty$ としたときの a_n の極限 (a_n が近づく値) を表す.



注意 1 と① より

$a_n^2 \leq |A| \leq b_n^2$

$n \to \infty$ として $a^2 \leq |A| \leq a^2$

よって $|A| = a^2$ と定める. 例えば

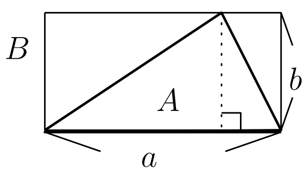
円周率 $\pi = 3.14159265358979323$
$8462643383279\cdots$ (覚え方: 産医師異国に向こう. 産後厄なく産婦みやしろに虫さんざん闇に鳴く) は無理数であるが, $a = \pi$ のとき, 例えば

$$\begin{aligned} &a_1 = 3.1, \quad a_2 = 3.14, \quad a_3 = 3.141, \quad a_4 = 3.1415, \quad \cdots \\ &b_1 = 3.2, \quad b_2 = 3.15, \quad b_3 = 3.142, \quad b_4 = 3.1416, \quad \cdots \end{aligned}$$

ととればよい.

注意 2: A が辺の長さが a, b の長方形のときは上と同様の理由より $|A| = ab$ と定める. A が多角形の場合は以下の (II) のように面積を定義できるが, 次のようにも考えられる:

多角形は三角形に分割でき, したがって三角形 ($= A$) の面積を定めればよい. 右図のように長方形 B を4つの三角形に分割して, その2つずつを用いて A と合同な三角形を2つ作れる. よって $|A| = \dfrac{1}{2}ab$ となる.



(II) ジョルダン (Jordan) 測度

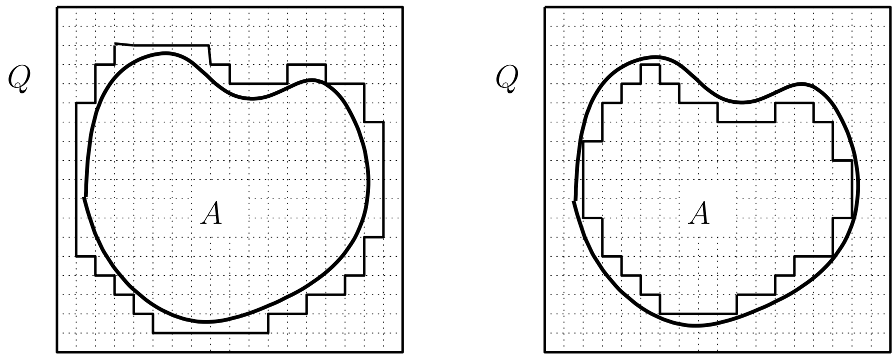
$A \subset \mathbb{R}^2$

① 簡単のために A がある正方形 Q に含まれている場合を考える. 各自然数 n に対して, A の上に 1 目盛りが $\dfrac{1}{n}$ である透明な方眼用紙をおく. A と共通部分をもつ小正方形の個数を N_n とすると, これらの面積の和は $\dfrac{N_n}{n^2}$ に等しい. $n \to \infty$ としたときの極限を A のジョルダン外測度といい, $\bar{m}_J(A)$ で表す. すなわち

$$\bar{m}_J(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n^2}$$

同様に A に完全に含まれる小正方形の個数を M_n とすると, これらの面積の和は $\dfrac{M_n}{n^2}$ に等しい. $n \to \infty$ としたときの極限を A のジョルダン内測度といい, $\underline{m}_J(A)$ で表す. すなわち

$$\underline{m}_J(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n^2}$$



以上の定義を次のようにも言い換えることができる.

$S_1, \cdots, S_N$: 各辺が座標軸に平行な有限個の正方形, $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} S_j$

このような $\{S_j\}$ を選び直して $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |S_j|\ (= |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_N|)$ をできるだけ小さくすることを考え, この極限によって $\bar{m}_J(A)$ を定義するといってもよい. 但しこのような $\{S_j\}$ が存在しないときは,

$\bar{m}_J(A)=\infty$ と定義する．ここで和集合 $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} S_j$ は $S_1, \cdots, S_N$ の少なくとも１つに含まれているような要素の全体を表す．また

$T_1, \cdots, T_N$: 有限個の正方形, $T_i \cap T_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

$T_j \subset A$ ($j=1,2,\cdots,N$)

を満たすように $\{T_j\}$ を選んで $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |T_j|$ をできるだけ大きくすることを考え, この極限によって $\underline{m}_J(A)$ を定義するといってもよい．但しこのような $\{T_j\}$ が存在しないとき, $\underline{m}_J(A)=0$ と定義する．

<u>**例 1**</u>: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ かつ x,y は有理数$\}$ のとき $\bar{m}_J(A)=1$, $\underline{m}_J(A)=0$. 実際, 実数を１つ与えると, そのどんな近くにも有理数が存在するので, $\mathbb{R}^2$ の１点を与えると, そのどんな近くにも有理数の座標をもつ点が存在する．

② A に対して $\bar{m}_J(A)=\underline{m}_J(A)$ のとき A は面積確定 (ジョルダン可測) であるといい, $|A|=\bar{m}_J(A)$ と定義する．

$\mathcal{A}:=\{A \big| \ A\subset\mathbb{R}^2$ かつ A は面積確定$\}$ とすると, $\mathcal{A}$, $|\cdot|$ は次の性質をもつ:

(1) $\emptyset\in\mathcal{A},\ \mathbb{R}^2\in\mathcal{A}$

(2) $A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A},\ A\cap B\in\mathcal{A}$

(3) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c(=\mathbb{R}^2\setminus A)\in\mathcal{A}$

(4) $A\in\mathcal{A}$ に対して $0\le|A|\le\infty$

(5) $|\emptyset|=0,\ |\mathbb{R}^2|=\infty$

(6) $A,B\in\mathcal{A},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow|A\cup B|=|A|+|B|$

(7) $A,B\in\mathcal{A},\ A\equiv B$ (合同) $\Rightarrow|A|=|B|$

(8) A が１辺の長さ 1 の正方形ならば $|A|=1$

ここで $B\setminus A=\{(x,y)\in B|\ (x,y)\notin A\}$

<u>**注意 3**</u>: (i) $A\in\mathcal{A}\Leftrightarrow\partial A\in A$ かつ $|\partial A|=0$
ここで ∂A は「A の境界」を表す．

(ii) “多角形”$\in \mathcal{A}$

(iii) $\mathbb{R}^3$ でも同様で, 正方形を立方体, 面積を体積に置き換える.

(iv) バナッハ・タルスキーの定理で少なくとも１つの小片は**体積確定でない**

$\leftarrow$ すべての小片が体積確定ならば上の (6) を繰り返し用いて体積が保存されることが分かり, 小片に分けてつなぎ合わせても体積は一定

(III) ルベーグ (Lebesgue) 測度

ジョルダン測度の拡張で, より多くの図形 (集合) の面積を定義できる.

$A \subset \mathbb{R}^2$

① ジョルダン外測度の定義では有限個の $S_1, \cdots, S_N$ を用いたが, これを (可算) 無限個の $S_1, S_2, \cdots$ に置き換えて, $\bar{m}_J(A)$ の代わりにルベーグ外測度 $m^*(A)$ を定義する. すなわち

$S_1, S_2, \cdots$: 各辺が座標軸に平行な (可算) 無限個の正方形, $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$

このような $\{S_j\}$ を選び直して $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |S_j|$ をできるだけ小さくすることを考え, この極限によって $m^*(A)$ を定義する. 定義より $m^*(A) \leq \bar{m}_J(A)$

② 簡単のために A がある正方形 Q に含まれている場合を考える.

$$m_*(A) := |Q| - m^*(Q \setminus A)$$

によって, A のルベーグ内測度 $m_*(A)$ を定義する. $m_*(A) \geq \underline{m}_J(A)$ が分かる.

③ A に対して $m^*(A) = m_*(A)$ のとき A はルベーグ可測 (ルベーグの意味で面積確定) であるといい, $|A| = m^*(A)$ によって A の面積 $|A|$ を定義する.

$$\mathcal{M} := \{A \big| \ A \subset \mathbb{R}^2 \text{ かつ } A \text{ はルベーグ可測}\}$$

とおくと, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ で $A \in \mathcal{A}$ ならば

$$\underline{m}_J(A) = m_*(A) = m^*(A) = \bar{m}_J(A)$$

また $\mathcal{M}$, $|\cdot|$ は ($\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}$ で置き換えて) 前の (1) $\sim$ (8) の性質を満たし, さらに

(2)$'$ $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$

(6)′ $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

$$\Rightarrow \Big|\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big| = \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| \ (= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |A_j|) \qquad \text{(可算加法性)}$$

ここで共通部分 (積集合) $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ はすべての A_1, A_2, $\cdots$ に共通に含まれている要素の全体を表す.

例 2: 例 1 の集合 A ($= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ かつ x, y は有理数 $\}$) に対して, $A \in \mathcal{M}$ かつ $|A| = 0$

($\because$ A は可算集合 (§3 参), すなわち $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ と表すことができる. $\varepsilon > 0$ を 1 つ固定して S_j を点 a_j を中心とする 1 辺の長さ $\dfrac{\varepsilon}{2^j}$ の正方形とすれば,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2^{2j}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{4^j} = \frac{\varepsilon^2}{3}$$

ここで $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{4^{N-1}} = \dfrac{1 - (1/4)^N}{1 - (1/4)} = 4\dfrac{1 - (1/4)^N}{3}$ を用いた.

故に ε の任意性より $m^*(A) = 0$. ギリシャ文字 ε については §6 参)

注意 3: バナッハ・タルスキーの定理で, 少なくとも 1 つの小片は**ルベーグ可測でない**.

2. Bolyai-Gerwien の定理

定理 1: 2 つの多角形 A, B が与えられたとする.

A を有限個の小多角形に分けてそれらを寄せ集めて B になる

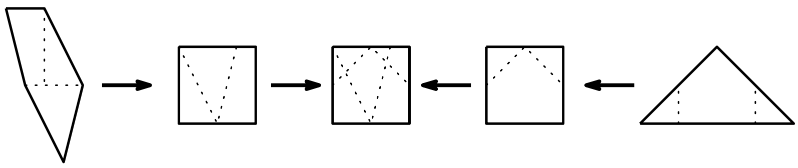
$\Leftrightarrow$ (必要十分条件)

$|A| = |B|$ (面積が等しい)

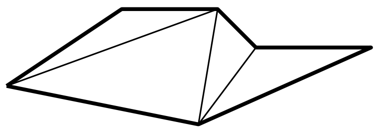
但し多角形の境界は無視する.

略証: ($\Rightarrow$) “多角形”$\in \mathcal{A}$ より面積は保存される.

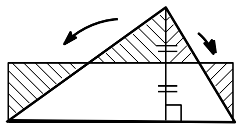
($\Leftarrow$) 多角形を小多角形に分けて, それを寄せ合わせて同じ面積をもつ正方形ができることをいえばよい ($\because$ 多角形と多角形の共通部分は有限個の多角形の和集合 $\leftarrow$ このことは多角形を三角形に分割し, 三角形と三角形の共通部分が多角形であることより分かる).



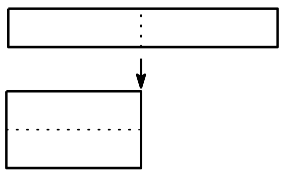
(i) 多角形を三角形に分割する (面積の和は変わらない).



(ii) 各三角形を小多角形に分けて 寄せ合わせて，１つの三角形から１つの長方形を作る.



(iii) 得られた各長方形の１辺の長さが他の辺の長さの４倍以内であるようにする.



(必要なら有限回繰り返す)

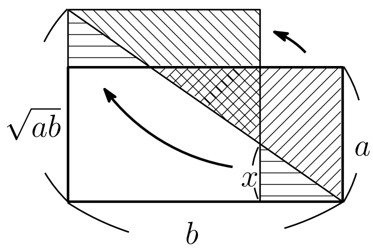
(iv) (iii) で得られた長方形を小多角形に分けて寄せ集めて１つの長方形から１つの正方形を作る.

$b \geq a, \quad 4a \geq b$

$x : (b - \sqrt{ab}) = \sqrt{ab} : b$ より

$x = \sqrt{ab} - a$

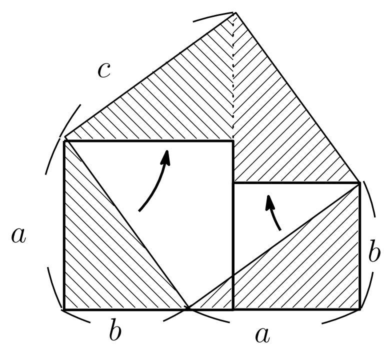
$x \leq a \Leftrightarrow 4a \geq b$



(v) 次に有限個の正方形を小多角形に分けて寄せ合わせて，１つの正方形を作る．このためには２個の正方形を１つの正方形にできることをいえばよい.

$a \geq b, \quad c^2 = a^2 + b^2$

(ピタゴラスの定理の証明にもなっている)



注意 4: $\mathbb{R}^3$ で「多角形」を「多面体」,「面積」を「体積」に読み替えて定理 1 は成り立つか？ $\rightarrow$
ヒルベルト (Hilbert) の第３問題:
　底面積と高さの等しい 4 面体 (したがって体積も等しい) の１方を有限個の小多面体に分けて, それらを寄せ合わせて他方の四面体を作ることは一般に不可能であることを示せ.
(1900 年パリ国際数学者会議でヒルベルトが２３の「数学の問題」をリストアップして２０世紀の数学の目標を与えた)
$\leftarrow$ ヒルベルトの第 3 問題は 1900 年に Dehn(デン) によって解決された ([Bo] 参照). すなわち Dehn は「正四面体を小多面体に分けてそれらを寄せ集めて立方体を作ることはできない」ことを示した (特別な四面体である Hill の四面体から立方体を作ることができるので (§5 参), ヒルベルトの第 3 問題が解決されたことになる).

3.　無限集合と選択公理

　X を空集合でない集合とする. X が**有限個**の要素からなっているとき (X が**有限集合**のとき), X の要素の個数を数えるということは X の要素に番号を付けて X のすべての要素を $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ と並べることであり, このとき X の要素の個数は n であるという. すなわち, 集合 X と n 以下の自然数からなる集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の間に１対１対応

$$\{1, 2, 3, \cdots, n\} \ni j \leftrightarrow x_j \in X$$

が存在するとき, X の要素の個数が n であるという. 一般に集合 X の各要素に集合 Y の要素を対応さす規則を写像といい, その写像を f とすれば f: $X \rightarrow Y$ 等と表す. また, 写像 f によって a ($\in X$) に対応する Y の要素を $f(a)$ で表す. 写像 f: $X \rightarrow Y$ が１対１対応であるとは

(1) $a, b \in X$, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$　(単射)

(2) どんな $y \in Y$ に対しても $y = f(x)$ となる $x \in X$ を見つけることができる　(全射)

このとき f の逆写像 g: $Y \rightarrow X$ が存在する (「$x \in X$, $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$」を満たす g が存在する). この g: $Y \rightarrow X$ も１対１対応になっている. X の要素の個数を X の濃度 (または基数) ともいい, $|X|$ で表す.

X が有限集合でないとき (上の自然数 n を見つけることができないとき), X は無限集合であるという.

X, Y を 集合として, 1対1対応 (全単射写像) f: $X \to Y$ が存在するとき X と Y は対等であるといい, 互いに対等な集合がもつ共通の性質を濃度 (または基数) といい, $|X|$ で表す.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$: 自然数全体のつくる集合

$A := \{2, 4, 6, \cdots\}$: 正の偶数全体のつくる集合

$B := \{1, 3, 5, \cdots\}$: 正の奇数全体のつくる集合

と表すとき, $\mathbb{N} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ であり,

$\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in A$: 1対1対応

$\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n-1 \in B$: 1対1対応

より, $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$ (バナッハ・タルスキーの定理 (1) に類似).

$\mathbb{N}$ と対等な集合を可算集合といい, 有限集合と可算集合を合わせて高々可算な集合という. 高々可算な集合とは各要素に番号を付けて並べることができる集合であるともいえる. 高々可算でない集合を非可算集合という. 有理数全体のつくる集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である. 実際, 零でない有理数は $\pm\dfrac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) の形で書かれる. 2 以上の自然数 ℓ に対して $m + n = \ell$ となる自然数 (m, n) の組は有限個しかないので, これらを小さいものから順に並べて, さらに $\ell = 2, 3, \cdots$ としてそれらを並べて, 数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}, \frac{1}{7}, \cdots$$

が得られる. $\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{1}$ より $\dfrac{2}{2}$ は既に前に現れているので, これらを消して重複を避ければ, 数列

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, 7, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \cdots$$

が得られ, 正の有理数全体が1列に並んだことになる. これを r_1, r_2, r_3, $\cdots$ と表せば,

$$\mathbb{Q} = \{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \cdots\}$$

と書け, $\mathbb{Q}$ が可算集合であることが分かる. 同様にして, 例 1 の集合 $\{(x, y) |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ かつ $x, y \in \mathbb{Q}\}$ が可算集合であることを示せる. 例えば開区間 $(0, 1)$ ($:= \{x \in \mathbb{R} |\ 0 < x < 1\}$) は非可算集合である. これを証明するために, 開区間 $(0, 1)$ が可算集合であると仮定して矛盾を

導こう (この証明方法は背理法と呼ばれる). $(0,1)$ が可算であると仮定しているので, $(0,1)$ のすべての要素に番号を付けて x_1, x_2, x_3, $\cdots$ と１列に並べることができる．各 x_n の小数展開を $x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$ とする (a_{nj} は 0 から 9 までの数字のいずれか).

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & 0. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ x_2 & = & 0. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ x_3 & = & 0. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ x_4 & = & 0. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

と書いて, 対角線上の数字 a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, $\cdots$ に着目し, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_{nn}\text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (a_{nn}\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定める．$x = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$ とおくと, $x \in (0,1)$ であって x はどの x_1, x_2, x_3, $\cdots$ とも一致しない ($\because$ $x = x_n$ ならば $b_n = a_{nn}$ でなければならないが, b_n の定義より不可能)．これは矛盾．故に開区間 $(0,1)$ は非可算集合である (この証明法は Cantor(カントール) の対角線論法と呼ばれる)．したがって, 実数全体のつくる集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

数学では集合を要素としてもつ集合を考える必要がある.

"無限個の集合" をどう表せばよいか？

・ 可算個の集合

X_1, X_2, X_3, $\cdots$　(または X_n ($n = 1, 2, \cdots$))

(番号付けることができる)．ここで各 X_n は集合.

・一般の場合

Λ: 集合, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 X_λ が定まっているとして,

X_λ ($\lambda \in \Lambda$)

選択公理 (AC): X: 集合, Λ: 集合

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X の空でない部分集合 X_λ が定まっていて

$$\lambda, \mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu \Rightarrow X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$$

を満たすとする．このとき, 写像 f: $\Lambda \to X$ で

$$f(\lambda) \in X_\lambda \quad (\ \lambda \in \Lambda)$$

を満たすものが存在する．すなわち, 各 X_λ から要素を１つずつ選び出す規則 (写像) が存在する.

注意 5: 「公理」とは無条件で正しいと認める命題. 「数学」は用語等の定義と公理の土台の上に築かれている.

$\to$

① 正しいと認めて採用する公理が異なるとそれに応じて「数学の世界」も異なる.

② 選択公理は公理として採用してもしなくてもよい. 但し「普通」の数学 (数学基礎論以外の数学) では選択公理を公理として採用する.

③ 選択公理を用いないと多くの重要な結果が証明できなくなる. バナッハ・タルスキーの定理 (パラドックス) を証明するには, 選択公理を用いる必要がある. またルベーグ可測でない集合の存在も, 選択公理を用いないと証明できない. **選択公理を公理として採用することは, 一見奇異に見えるバナッハ・タルスキーのパラドックスを数学の定理として認めることになる**.

4. バナッハ・タルスキーの定理

$A, B \subset \mathbb{R}^3$

$A \cong B \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} A$ を平行移動と回転を用いて B に移すことができると定義する.

定理 2 ((AC) を仮定): $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \big| \ \|x\| \leq 1\}$ を原点を中心とする半径 1 の閉球とする. ここで $\|x\|$ は x と原点との (ユークリッドの) 距離, すなわち $x = (x_1, x_2, x_3)$ のとき $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. そのとき

$$\Omega_i \subset \Omega \ (\ 1 \leq i \leq 5), \quad A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 \subset \Omega$$

を次の性質をもつように選ぶことができる:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (\ i \neq j), \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (\ i \neq j)$$

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

$$A_1 \cong \Omega_1, \quad A_2 \cong \Omega_2, \quad B_1 \cong \Omega_3, \quad B_2 \cong \Omega_4, \quad B_3 \cong \Omega_5$$

注意 6: (i) 半径 1 の閉球を 5 つの小片に分けて, そのうちの 2 個と 3 個をそれぞれつなぎ合わせて, 半径 1 の閉球を 2 つ作れることを意味する. この "5" を少なくすることはできない.
(ii) $\mathbb{R}^2$ では球を円 (板) に置き換えて, 対応する定理は成立しない. 但し Ω

($\subset \mathbb{R}^2$) を適当に選べば類似の定理が成り立つ (Sierpiński-Mazurkiewicz のパラドックス).

定理 3 ((AC)): $A, B \subset \mathbb{R}^3$ かつ A, B は有界 (原点を中心とする十分大きい半径の球に含まれる) かつ内点をもつ (A に含まれる球が存在し, また B に含まれる球も存在する) と仮定する. そのとき, 有限個の集合 $A_1, \cdots,$ A_N, $B_1, \cdots, B_N$ で次を満たすものが存在する:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (\ i \neq j)$$
$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i, \quad A_i \cong B_i \ (\ 1 \leq i \leq N)$$

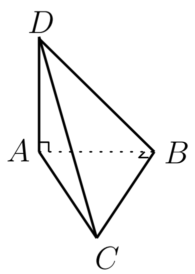
注意 7: 例えば指定された半径をもつ球やもっと一般に内点をもつ有界な立体を, 半径 1 の球を有限個の小片に分けてつなぎ合わせて作ることができること意味する.

定理 2, 3 の証明については以下の [W] と [Be] 及び
http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/indexj.html 教材・資料の「バナッハ・タルスキーのパラドックス」を参照して下さい. 但し, 大学 1 年で習う行列の知識を必要とする.

参考文献

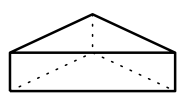
[W] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge Univ. Press, 1985.
[Be] Richard Beals, Analysis, An Introduction, Cambridge Univ. Press, 2004.
[Bo] Vladimir G. Boltianskii, Hibert's Third Problem, trans. by R. Silverman, Winston, 1978.

5. 付録 1

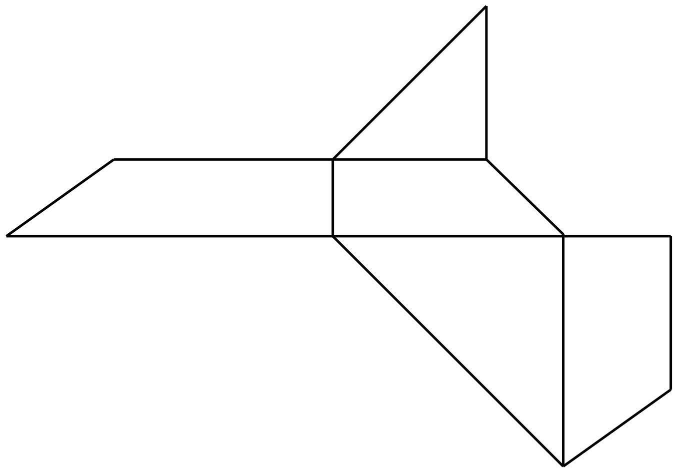


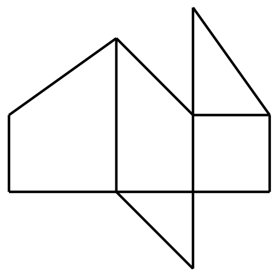
$AB = BC = AD$

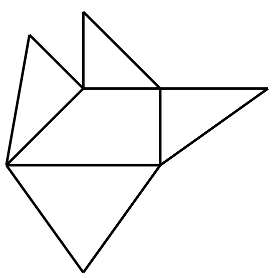
$\angle BAD$
$= \angle ABC$
$= \angle CAD$
$= 90^\circ$

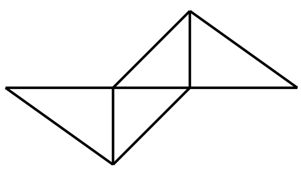


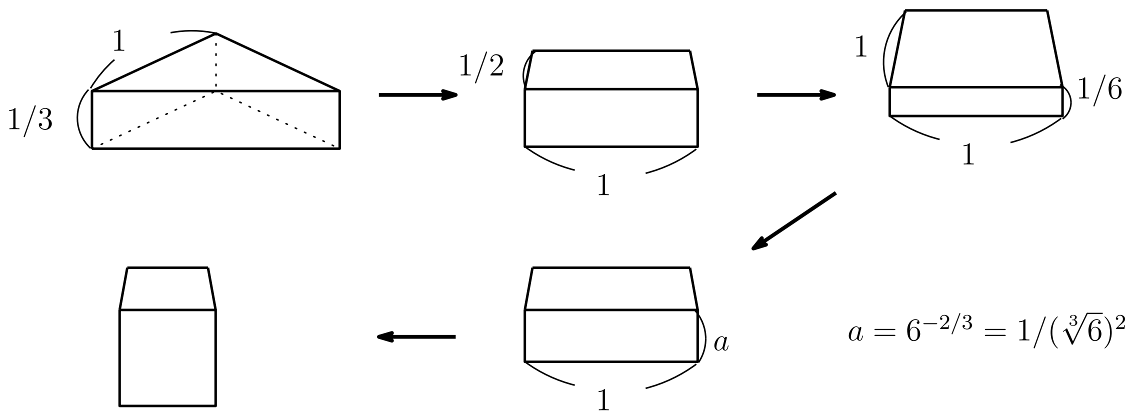
前ページ左の四面体は Hill の四面体と呼ばれ, 右の立体は Hill の四面体と同じ底面と同じ体積をもつ三角柱である. また下の４図形はそれぞれ立体の展開図であり, これらの立体をつなぎ合わせて, Hill の四面体を作ることができる. またこれら４つの立体から前ページの三角柱を作ることもできる. 三角柱を有限個の小多面体に分けてそれらをつなぎ合わせて, 同じ体積の立方体を作ることができる. 実際例えば稜 (辺) AB の長さを 1 とすれば, 体積は $\dfrac{1}{6}$ となり, 定理 1 の証明中の方法を適用して, 上の三角柱から各稜の長さが $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ である直方体を作れる. さらに各稜の長さが $1, 1, \dfrac{1}{6}$ である直方体を作れる. 一方体積 $\dfrac{1}{6}$ の立方体から同様にして, 各稜の長さが $1, 6^{-2/3}, 6^{-1/3}$ である直方体を作れる. さらに各稜の長さが $1, 1, \dfrac{1}{6}$ である直方体を作れる. 以上より Hill の四面体を小多面体に分けてこれらをつなぎ合わせて, 同じ体積の立方体を作れることが分かる.











立方体１稜 $1/\sqrt[3]{6}$

6.　付録２

ギリシャ文字

文 字：名　称	文 字：名　称	文 字：名　称
$A\ \alpha$：alpha アルファ	$I\ \iota$：iota イオタ	$P\ \rho$：rho ロー
$B\ \beta$：beta ベータ	$K\ \kappa$：kappa カッパ	$\Sigma\ \sigma, \varsigma$：sigma シグマ
$\Gamma\ \gamma$：gamma ガンマ	$\Lambda\ \lambda$：lambda ラムダ	$T\ \tau$：tau タウ
$\Delta\ \delta$：delta デルタ	$M\ \mu$：mu ミュー	$\Upsilon\ \upsilon$：upsilon ユプシロン
$E\ \varepsilon$：epsilon イプシロン	$N\ \nu$：nu ニュー	$\Phi\ \phi, \varphi$：phi ファイ
$Z\ \zeta$：zeta ゼータ	$\Xi\ \xi$：xi グザイ	$X\ \chi$： chi カイ
$H\ \eta$：eta エータ	$O\ o$：omicron オミクロン	$\Psi\ \psi$：psi プサイ
$\Theta\ \theta, \vartheta$：theta シータ	$\Pi\ \pi, \varpi$：pi パイ	$\Omega\ \omega$：omega オメガ

ローマ数字

1	2	3	4	5	6	7	8	9
I (i)	II (ii)	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
10	11	12	13	14	15	19	20	21
X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XIX	XX	XXI
28	30	36	40	49	50	65	82	99
XXVIII	XXX	XXXVI	XL	XLIX	L	LXV	LXXXII	XCIX
100	115	198	360	400	455	500	621	906
C	CXV	CXCVIII	CCCLX	CD	CDLV	D	DCXXI	CMVI
1000	2340	79	87	333	491	1905	3670	3999
M	MMCCCXL							