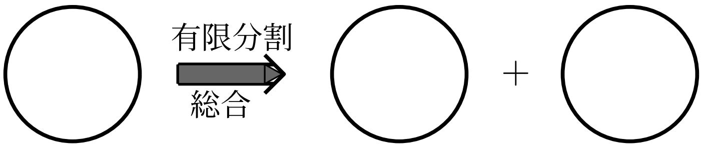
バナッハ・タルスキーのパラドックス

物質創成先端科学専攻
若林誠一郎

定理 (Banach-Tarski(バナッハ・タルスキー) のパラドックス, 1924):

(1) 球を有限個の小片に分けて, それらをつなぎ合わせて元の球と同じ大きさの球を 2 ヶ再構成できる.



(2) グリーンピースを有限個の小片に分けて, それらをつなぎ合わせて太陽と同じ大きさの球を再構成できる.

◎ 上の定理は質量の保存則に矛盾するか？
(密度が一定なら質量と体積は比例する)

$\Longrightarrow$

体積とは何か？

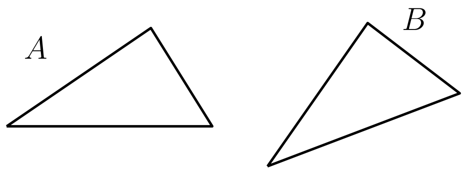
1. 測度

(線分の) 長さ: 数直線 ($= \mathbb{R}$) 上の測度
(平面図形の) 面積: 平面 ($= \mathbb{R}^2$) 上の測度
(立体の) 体積: 空間 ($= \mathbb{R}^3$) 上の測度
以下, $\mathbb{R}^2$ 上の測度である面積を考える ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ でも同様).
A ($\subset \mathbb{R}^2$): 平面図形 (平面上の集合), $|A|$: A の面積

$|A|$ の期待される性質:

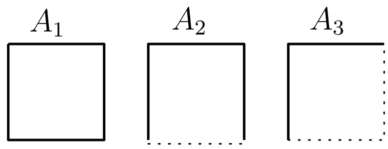
(i) $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して $|A| \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$

(ii) $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $A \equiv B$ (A と B が合同, *i.e.*, A を平行移動と回転及び裏返しによって B に重ねることができる) ならば, $|A| = |B|$



(iii) $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$ ならば $|A \cup B| = |A| + |B|$

(iv) A が１辺の長さ 1 の正方形ならば, $|A| = 1$. 但し, A がその境界である辺を含む場合も含まない場合も $|A| = 1$



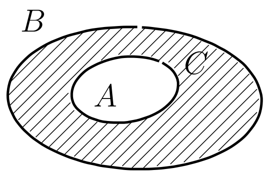
$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 1$

注意 1: $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$

$\because$ $B = A \cup C$, $A \cap C = \emptyset$ より

(i), (iii) によって

$|B| = |A| + |C| \geq |A|$



以上の性質 (i) 〜 (iv) をもつように面積 (測度) を定義しよう.

(I) A が１辺の長さ a (> 0) の正方形のとき

① $a \in \mathbb{Q}$ (*i.e.* a が有理数) のとき, 自然数 m, n を適当に選んで, $a = \dfrac{m}{n}$ と表せる.

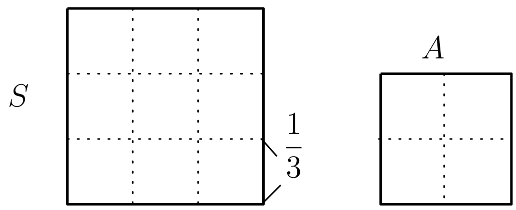
１辺の長さ 1, 中心が原点である正方形を S とする. S の各辺を n 等分すると, S は１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の n^2 個の正方形に分割される. 故に

"１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の正方形の面積"$= 1 \div n^2 = \dfrac{1}{n^2}$

と定める. 同様に A の各辺を m 等分すれば, A は１辺の長さ $\dfrac{1}{n}$ の m^2 個の正方形に分割される. よって

$|A| = m^2 \times \dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = a^2$ と定める.

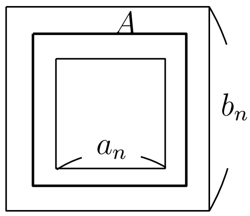
$a = \dfrac{2}{3}$ のとき



② $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*i.e.* a が無理数) のとき
有理数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a < \cdots < b_3 < b_2 < b_1, \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

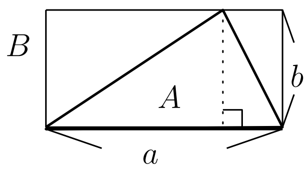
を満たすものがとれる (a を有理数で上と下から近似). 注意 1 と① より



$$a_n^2 \le |A| \le b_n^2$$

$n \to \infty$ として $a^2 \le |A| \le a^2$
よって $|A| = a^2$ と定める.

注意 2: A が辺の長さが a, b の長方形のときは上と同様の理由より $|A| = ab$ と定める. A が多角形の場合は以下の (II) のように面積を定義できるが, 次のようにも考えられる:
多角形は三角形に分割でき, したがって三角形 $(= A)$ の面積を定めればよい. 右図のように長方形 B を４つの三角形に分割して, その２つずつを用いて A と合同な三角形を２つ作れる. よって $|A| = \dfrac{1}{2}ab$ となる.



(II) ジョルダン (Jordan) 測度

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

① $S_1, \cdots, S_N$: 各辺が座標軸に平行な有限個の正方形, $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} S_j$

このような $\{S_j\}$ についての $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |S_j|$ の下限を $\bar{m}_J(A)$ で表し, A のジョルダン外測度という. すなわち $a = \bar{m}_J(A)$ とは, 上のどんな $\{S_j\}$ に対しても

$$a \le \sum_{j=1}^{N} |S_j|$$

かつどんな $\varepsilon > 0$ に対しても, 有限個の正方形 $S_1, \cdots, S_N$ (ε に依存) で

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{N} |S_j| < a + \varepsilon$$

を満たすものが存在する. 但し上の $\{S_j\}$ が存在しないとき, $\bar{m}_J(A) = \infty$ とする.

② $S_1, \cdots, S_N$: 有限個の正方形, $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} S_j \subset A$

このような $\{S_j\}$ についての $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |S_j|$ の上限を $\underline{m}_J(A)$ で表し, A のジョルダン内測度という. すなわち $a = \underline{m}_J(A)$ とは, 上のどんな $\{S_j\}$ に対しても

$$a \ge \sum_{j=1}^{N} |S_j|$$

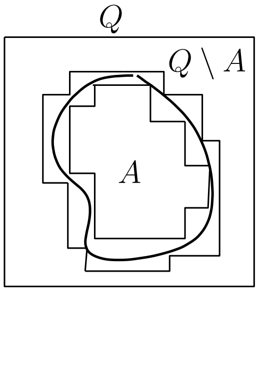
かつどんな $\varepsilon > 0$ に対しても, 有限個の正方形 $S_1, \cdots, S_N$ (ε に依存) で

$$S_i \cap S_j = \emptyset \ (\, i \neq j), \quad \bigcup_{j=1}^{N} S_j \subset A \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{N} |S_j| > a - \varepsilon$$

を満たすものが存在する. 但し上の $\{S_j\}$ が存在しないとき, $\underline{m}_J(A) = 0$ とする.

例 1: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ かつ $x, y \in \mathbb{Q}\}$ のとき $\bar{m}_J(A) = 1$, $\underline{m}_J(A) = 0$

③ A に対して $\bar{m}_J(A) = \underline{m}_J(A)$ のとき A は面積確定 (ジョルダン可測) であるといい, $|A| = \bar{m}_J(A)$ と定義する.



Q: 正方形, $A \subset Q$ のとき
$\underline{m}_J(A) = |Q| - \bar{m}_J(Q \setminus A)$ より

$$A \text{ が面積確定} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{m}_J(A) + \bar{m}_J(Q \setminus A) = |Q|$$

ここで $Q \setminus A = \{(x, y) \in Q \big| \ (x, y) \notin A\}$

$\mathcal{A} := \{A \big| \ A \subset \mathbb{R}^2$ かつ A は面積確定 $\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) := \{A \big| \ A \subset \mathbb{R}^2\}$: $\mathbb{R}^2$ の部分集合を要素とする集合

($\mathbb{R}^2$ のべき集合)

とすると, 例 1 より $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$\mathcal{A}$, $|\cdot|$ は次の性質をもつ:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}, \ \mathbb{R}^2 \in \mathcal{A}$

(2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, \ A \cap B \in \mathcal{A}$

(3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c (= \mathbb{R}^2 \setminus A) \in \mathcal{A}$

(4) $A \in \mathcal{A}$ に対して $0 \leq |A| \leq \infty$

(5) $|\emptyset| = 0, \ |\mathbb{R}^2| = \infty$

(6) $A, B \in \mathcal{A}, \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

(7) $A, B \in \mathcal{A}, \ A \equiv B$ (合同) $\Rightarrow |A| = |B|$

(8) A が 1 辺の長さ 1 の正方形ならば $|A| = 1$

注意 3: (i) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \partial A \in A$ かつ $|\partial A| = 0 \Leftrightarrow$

「どんな $\varepsilon > 0$ に対しても有限個の正方形 $S_1, \cdots, S_N$ で

$$\partial A \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j, \quad \sum_{j=1}^{N} |S_j| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する」

ここで ∂A は「A の境界」を表す.

(ii) "多角形"$\in \mathcal{A}$

(iii) $\mathbb{R}^3$ でも同様で, 正方形を立方体, 面積を体積に置き換える.

(iv) バナッハ・タルスキーの定理で少なくとも 1 つの小片は**体積確定でない**

$\leftarrow$ すべての小片が体積確定ならば上の (6) を繰り返し用いて体積が保存されることが分かり, 小片に分けてつなぎ合わせても体積は一定

(III) ルベーグ (Lebesgue) 測度

ジョルダン測度の拡張で, より多くの図形 (集合) の面積を定義できる.

$A \subset \mathbb{R}^2$

① $S_1, S_2, \cdots$: 高々可算無限個の正方形, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$

このような $\{S_j\}$ についての $\sum_{j=1}^{\infty} |S_j|$ の下限を $m^*(A)$ と定義し, A のルベーグ外測度という. 定義より $m^*(A) \leq \bar{m}_J(A)$

② Q_n を１辺の長さ n, 中心が原点である正方形として, $A \subset Q_n$ のとき $m_*(A) := |Q_n| - m^*(Q_n \setminus A)$ と定義し, 一般の A に対して

$$m_*(A) := \lim_{n\to\infty} m_*(Q_n \cap A)$$

と定義する. $m_*(A)$ を A のルベーグ内測度という. $m_*(A) \geq \underline{m}_J(A)$ が分かる.

③ A に対して $m^*(A) = m_*(A)$ のとき A はルベーグ可測 (ルベーグの意味で面積確定) であるといい, $|A| = m^*(A)$ によって A の面積 $|A|$ を定義する.

$\mathcal{M} := \{A \big| \ A \subset \mathbb{R}^2$ かつ A はルベーグ可測 $\}$
とおくと, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ で $A \in \mathcal{A}$ ならば

$$\underline{m}_J(A) = m_*(A) = m^*(A) = \bar{m}_J(A)$$

また $\mathcal{M}, |\cdot|$ は ($\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}$ で置き換えて) 前の (1) ∼ (8) の性質を満たし, さらに

$(2)'$ $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$

$(6)'$ $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset \ (\ i \neq j) \Rightarrow \left|\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |A_j|$

(可算加法性)

<u>**例 2**</u>: 例 1 の集合 A ($= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1$ かつ $x, y \in \mathbb{Q}\}$) に対して, $A \in \mathcal{M}$ かつ $|A| = 0$
($\because$ A は可算集合, すなわち $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ と表すことができる. $\varepsilon > 0$ を１つ固定して S_j を点 a_j を中心とする１辺の長さ $\dfrac{\varepsilon}{2^j}$ の正方形とすれば,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |S_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2^{2j}} = \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{\varepsilon^2}{3}$$

故に ε の任意性より $m^*(A) = 0$)
注意 3: バナッハ・タルスキーの定理で, 少なくとも１つの小片は**ルベーグ可測でない**.

2. Bolyai-Gerwien の定理

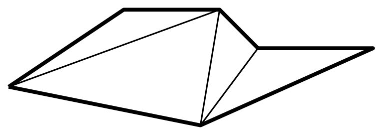
定理 1: ２つの多角形 A, B が与えられたとする.

A を有限個の小多角形に分けてそれらを寄せ集めて B になる
$\Leftrightarrow$ (必要十分条件)
$|A| = |B|$ (面積が等しい)

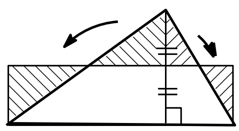
但し多角形の境界は無視する.

略証: ($\Rightarrow$) "多角形"$\in \mathcal{A}$ より面積は保存される.
($\Leftarrow$) 多角形を小多角形に分けて, それを寄せ合わせて同じ面積をもつ正方形ができることをいえばよい ($\because$ 多角形と多角形の共通部分は有限個の多角形の和集合 $\leftarrow$ このことは多角形を三角形に分割し, 三角形と三角形の共通部分が多角形であることより分かる).

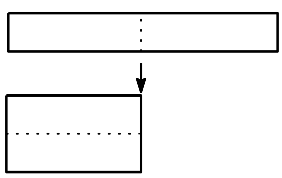
(i) 多角形を三角形に分割する (面積の和は変わらない).



(ii) 各三角形を小多角形に分けて 寄せ合わせて, １つの三角形から１つの長方形を作る.



(iii) 得られた各長方形の１辺の長さが他の辺の長さの４倍以内であるようにする.



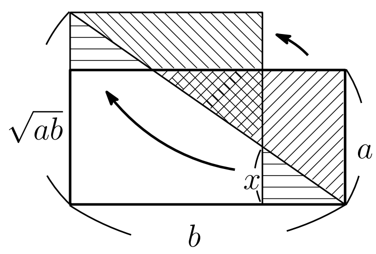
(必要なら有限回繰り返す)

(iv) (iii) で得られた長方形を小多角形に分けて寄せ集めて１つの長方形から１つの正方形を作る.

$b \geq a, \quad 4a \geq b$

$x = \sqrt{ab} - a$

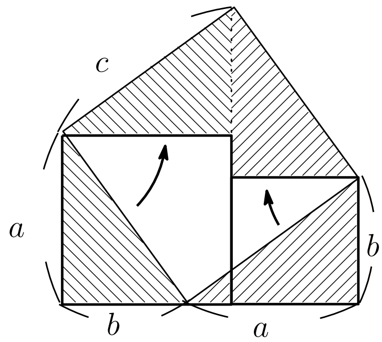
$x \leq a \Leftrightarrow 4a \geq b$



(v) 次に有限個の正方形を小多角形に分けて寄せ合わせて，１つの正方形を作る．このためには２個の正方形を１つの正方形にできることをいえばよい.

$a \geq b, \quad c^2 = a^2 + b^2$

(ピタゴラスの定理の証明にもなっている)



注意 4: $\mathbb{R}^3$ で「多角形」を「多面体」,「面積」を「体積」に読み替えて定理 1 は成り立つか？ →

ヒルベルト (Hilbert) の第３問題:

底面積と高さの等しい４面体 (したがって体積も等しい) の１方を有限個の小多面体に分けて, それらを寄せ合わせて他方の四面体を作ることは一般に不可能であることを示せ.

(1900 年パリ国際数学者会議でヒルベルトが２３の「数学の問題」をリストアップして２０世紀の数学の目標を与えた)

← ヒルベルトの第３問題は 1900 年に Dehn(デン) によって解決された ([Bo] 参照). すなわち Dehn は「正四面体を小多面体に分けてそれらを寄せ集めて立方体を作ることはできない」ことを示した (特別な四面体である Hill の四面体から立方体を作ることができるので (§6 参), ヒルベルトの第３問題が解決されたことになる).

3.　無限集合と選択公理

濃度 (基数) ≒「集合の要素の個数」

X: 集合, $X \neq \emptyset$ として, X の要素に番号を付けて $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と並べることができ, このように有限個で終わるとき, すなわち, 自然数 n と

1対1対応 (全単射写像) f: $\{1,2,\cdots,n\} \ni j \mapsto x_j \in X$ が存在するとき, X を有限集合, X の濃度 $|X|$ が n であるという. X が有限集合でないとき無限集合であるという.

X, Y: 集合 として, 全単射写像 f: $X \to Y$ が存在するとき X と Y は対等であるといい, 互いに対等な集合がもつ共通の性質を濃度 (または基数) といい, $|X|$ で表す.

$\mathbb{N} := \{1,2,3,\cdots\}$: 自然数全体のつくる集合

$A := \{2,4,6,\cdots\}$: 正の偶数全体のつくる集合

$B := \{1,3,5,\cdots\}$: 正の奇数全体のつくる集合

と表すとき, $\mathbb{N} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ であり,

$A \ni 2n \mapsto n \in \mathbb{N}$: 全単射

$B \ni 2n-1 \mapsto n \in \mathbb{N}$: 全単射

より, $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$ (バナッハ・タルスキーの定理 (1) に類似).

$\mathbb{N}$ と対等な集合を可算集合といい, 有限集合と可算集合を合わせて高々可算な集合という. 高々可算でない集合を非可算集合という. 実数全体のつくる集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

数学では集合を要素としてもつ集合を考える必要がある.

"無限個の集合" をどう表せばよいか？

・ 可算個の集合

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ (または X_n ($n = 1,2,\cdots$))

(番号付けることができる). ここで各 X_n は集合.

・一般の場合

Λ: 集合, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 X_λ が定まっているとして,

X_λ ($\lambda \in \Lambda$)

選択公理 (AC): X: 集合, Λ: 集合

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X の空でない部分集合 X_λ が定まっていて

$$\lambda, \mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu \Rightarrow X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$$

を満たすとする. このとき, 写像 f: $\Lambda \to X$ で

$$f(\lambda) \in X_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$$

を満たすものが存在する. すなわち, 各 X_λ から要素を1つずつ選び出す規則 (写像) が存在する.

注意 5: 「公理」とは無条件で正しいと認める命題. 「数学」は用語等の定義と公理の土台の上に築かれている.

$\rightarrow$

① 正しいと認めて採用する公理が異なるとそれに応じて「数学の世界」も異なる.

② 選択公理は公理として採用してもしなくてもよい. 但し「普通」の数学 (数学基礎論以外の数学) では選択公理を公理として採用する.

③ 選択公理を用いないと多くの重要な結果が証明できなくなる. バナッハ・タルスキーの定理 (パラドックス) を証明するには, 選択公理を用いる必要がある. またルベーグ可測でない集合の存在も, 選択公理を用いないと証明できない. **選択公理を公理として採用することは, 一見奇異に見えるバナッハ・タルスキーのパラドックスを数学の定理として認めることになる**.

4. バナッハ・タルスキーの定理

$A, B \subset \mathbb{R}^3$
$A \cong B \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} A$ を平行移動と回転を用いて B に移すことができる
と定義する.

定理 2 ((AC) を仮定): $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| \leq 1\}$ を原点を中心とする半径 1 の閉球とする. ここで $\|x\|$ は x と原点との (ユークリッドの) 距離. そのとき

$$\Omega_i \subset \Omega \ (\ 1 \leq i \leq 5), \quad A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 \subset \Omega$$

を次の性質をもつように選ぶことができる:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (\ i \neq j), \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (\ i \neq j)$$
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$
$$A_1 \cong \Omega_1, \quad A_2 \cong \Omega_2, \quad B_1 \cong \Omega_3, \quad B_2 \cong \Omega_4, \quad B_3 \cong \Omega_5$$

注意 6: (i) 半径 1 の閉球を 5 つの小片に分けて, そのうちの 2 個と 3 個をそれぞれつなぎ合わせて, 半径 1 の閉球を 2 つ作れることを意味する. この "5" を少なくすることはできない.
(ii) $\mathbb{R}^2$ では球を円 (板) に置き換えて, 対応する定理は成立しない. 但し Ω ($\subset \mathbb{R}^2$) を適当に選べば類似の定理が成り立つ (Sierpiński-Mazurkiewicz のパラドックス).

定理 3 ((AC)): $A, B \subset \mathbb{R}^3$ かつ A, B は有界 (原点を中心とする十分大きい半径の球に含まれる) かつ内点をもつ (A に含まれる球が存在し, また B に含まれる球も存在する) と仮定する. そのとき, 有限個の集合 $A_1, \cdots,$ A_N, $B_1, \cdots, B_N$ で次を満たすものが存在する:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (\ i \neq j)$$
$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i, \quad A_i \cong B_i \ (\ 1 \leq i \leq N)$$

注意 7: 例えば指定された半径をもつ球やもっと一般に内点をもつ有界な立体を, 半径 1 の球を有限個の小片に分けてつなぎ合わせて作ることができること意味する.

5. 定理 2,3 の証明

"5" を "6" としたときの定理 2 (定理 4) を証明しよう ("5" のときの証明については [W] を参照).

$SO(3)$: $\mathbb{R}^3$ の原点の周りの回転のつくる群. 3×3 (実) 直交行列で $\det = 1$ なる行列の全体のつくる群と同一視される. 但し, $\mathbb{R}^3$ の点を列ベクトルで表して, $SO(3)$ の要素による作用を列ベクトルに左から対応する直交行列をかけることと同一視する.

$\sigma, \tau \in SO(3)$ を固定して

$$G = \{I\} \cup \{\sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n} \big|\ n \in \mathbb{N} \text{ かつ } j_i, k_i \in \mathbb{Z} \ (\ 1 \leq i \leq n) \text{ は次の } (*) \text{ を満たす}\}$$

$$(*) \quad \begin{cases} (j_1, k_1) \neq (0,0) & (\ n = 1 \text{ のとき}) \\ j_i \neq 0 \ (\ 2 \leq i \leq n), \quad k_\ell \neq 0 \ (\ 1 \leq \ell \leq n-1) & (\ n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. ここで I は単位行列を表す. また $\mathbb{Z}$ は整数全体のつくる集合を表す.

G が次の性質をもつとき, G は自由 (free) であるという (G が rank 2 の自由部分群):

$$n \in \mathbb{N},\ j_i, k_i \in \mathbb{Z} \ (\ 1 \leq i \leq n) \text{ が } (*) \text{ を満たす}$$
$$\Rightarrow$$
$$\sigma^{j_1}\tau^{k_1}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n} \neq I \ (\ SO(3) \text{ において})$$

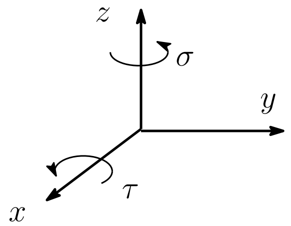
G が自由であるとき, 単位行列 I でない G の要素 w に対して $(*)$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ と $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq n$) がただ一組存在して,

$$w = \sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n}$$

と表される (表示の一意性).

補題 1: $\sigma, \tau \in SO(3)$ を適当に選べば, 上の G は自由になる.

証明 ([W] Theorem 2.1 または [Be] p239)
σ: z 軸の周りに反時計方向に
　　$\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}$ の角度の回転
τ: x 軸の周りに反時計方向に
　　$\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}$ の角度の回転
ととれば, G が自由であることを示そう.



$$\sigma^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \mp\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \mp\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

である. $n \in \mathbb{N}$ と $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq n$) は $(*)$ を満たすとする.

$$w = \sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n}$$

とおく. 但し $j_1 = 0$ のとき $w = \tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n}$, また $k_n = 0$ のときは $w = \sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}$ 等と w を表すことにする. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(|j_i| + |k_i|)$ を w の長さという. w の右がτ^{k_n} ($k_n \neq 0$) で終わっているとき, $\sigma^{-1}w\sigma = \cdots\tau^{k_n}\sigma$ となり, また

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1}w\sigma = I \quad (\ SO(3)\ \text{において}) \\ &\quad\quad \Leftrightarrow \\ &w = I \quad (\ SO(3)\ \text{において}) \end{aligned}$$

故に $j_n \neq 0$, $k_n = 0$ と仮定して $w \neq I$ ($SO(3)$ において) を示せば十分である. 背理法を用いて証明しよう ($w = I$ ($SO(3)$ において) と仮定して矛盾を導く).

主張: w の長さを k とする．そのとき

$$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix},\quad b\not\equiv 0 \pmod 3$$

を満たす $a,b,c\in\mathbb{Z}$ が存在する．ここで

$b\equiv a \pmod 3 \overset{\text{定義}}{\iff} b-a$ が 3 で割り切れる

$b\not\equiv a \pmod 3 \overset{\text{定義}}{\iff} b-a$ が 3 で割り切れない

主張を w の長さ k についての帰納法で証明しよう．この主張が証明されれば, 特に $b\neq 0$ より $w\neq I$ ($SO(3)$ において) が分かり, 補題 1 が証明されたことになる．$k=1$ のとき, $w=\sigma^{\pm 1}$ の形で

$$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\sigma^{\pm 1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\\pm 2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

より主張は正しい．今ある $\ell\in\mathbb{N}$ に対して $k\leq\ell$ のとき主張が正しいと仮定する．$k=\ell+1$ とする．そのとき w' を長さ ℓ かつ右が σ^{ν} ($\nu\neq 0$) で終わっている G の要素として,

$$w=\sigma^{\pm 1}w' \quad \text{または} \quad w=\tau^{\pm 1}w'$$

と表すことができる．帰納法の仮定より

$$w'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3^\ell}\begin{pmatrix}a'\\b'\sqrt{2}\\c'\end{pmatrix},\quad b'\not\equiv 0 \pmod 3$$

を満たす $a',b',c'\in\mathbb{Z}$ が存在する．

$$w\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix}$$

とかけば,

(1) $\quad a=a'\mp 4b',\quad b=\pm 2a'+b',\quad c=3c'\quad$ ($w=\sigma^{\pm 1}w'$ のとき)

(2) $\quad a=3a',\quad b=b'\mp 2c',\quad c=\pm 4b'+c'\quad$ ($w=\tau^{\pm 1}w'$ のとき)

故に $a,b,c\in\mathbb{Z}$ は明らか．場合に分けて $b\not\equiv 0 \pmod 3$ を示そう．

① $w=\sigma^{\pm 1}\tau^{\varepsilon}v$, $\varepsilon\in\{1,-1\}$ のとき
$w'=\tau^{\varepsilon}v$ で w を w', w' を v で置き換えて (2) を適用して, $a'\equiv 0 \pmod 3$. 故に (1) より $b=\pm 2a'+b'\equiv b'\not\equiv 0 \pmod 3$.

② $w=\tau^{\pm 1}\sigma^{\varepsilon}v$, $\varepsilon\in\{1,-1\}$ のとき
$\ell=1$ のとき $v=I$ であることに注意する. ① と同様にして (1) より $c'\equiv 0 \pmod 3$ が分かり, (2) より $b=b'\mp 2c'\equiv b'\not\equiv 0 \pmod 3$.

③ $w=\sigma^{\pm 1}\sigma^{\pm 1}v$ のとき
$\ell=1$ のとき $v=I$ であることに注意する.

$$v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{\ell-1}}\begin{pmatrix}a''\\b''\sqrt{2}\\c''\end{pmatrix}$$

とかく ($a''=1$, $b''=0$, $c''=0$ ($\ell=1$ のとき)). そのとき (1) を繰り返し適用して,

$$b=\pm 2a'+b'=\pm 2(a''\mp 4b'')+2b'-(\pm 2a''+b'')=2b'-9b''$$

よって $b\equiv 2b'\not\equiv 0 \pmod 3$

④ $w=\tau^{\pm 1}\tau^{\pm 1}v$ のとき

$$v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{\ell-1}}\begin{pmatrix}a''\\b''\sqrt{2}\\c''\end{pmatrix}$$

とかいて, (2) を繰り返し適用して,

$$b=b'\mp 2c'=2b'-(b''\mp 2c'')\mp 2(\pm 4b''+c'')=2b'-9b''$$

よって $b\equiv 2b'\not\equiv 0 \pmod 3$. 以上より主張が示された. □

補題 2: $H_i(\subset G)$ ($1\leq i\leq 4$) を

$$\begin{aligned}&H_i\cap H_j=\emptyset \ (i\neq j),\quad I\notin H_i \ (1\leq i\leq 4)\\&G=\sigma(H_1)\cup\tau(H_2),\quad \sigma(H_1)\cap\tau(H_2)=\emptyset\\&G=\sigma^{-1}(H_3)\cup\tau^{-1}(H_4),\quad \sigma^{-1}(H_3)\cap\tau^{-1}(H_4)=\emptyset\end{aligned}$$

を満たすように選ぶことができる. ここで $\sigma(H_1) = \{\sigma h \big|\ h \in H_1\}$.

証明 $W(\sigma^{-1})$ で左端が σ^{-1} で始まる G の要素の全体を表す. すなわち

$$W(\sigma^{-1}) = \{\sigma^{j_1}\tau^{k_1}\sigma^{j_2}\tau^{k_2}\cdots\sigma^{j_n}\tau^{k_n} \big|\ n \in \mathbb{N},\ j_i, k_i \in \mathbb{Z}\ (\ 1 \le i \le n)\ \text{は次の (3) を満たす}\ \}$$

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} j_1 < 0 \\ j_i \neq 0\ (\ 2 \le i \le n), \quad k_\ell \neq 0\ (\ 1 \le \ell \le n-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\ n \ge 2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

同様に $W(\sigma), W(\tau^{\pm 1})$ を定義する. そのとき

$$\text{(4)} \qquad G = \{I\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$$

であって, 集合 $\{I\}$, $W(\sigma^{\pm 1})$, $W(\tau^{\pm 1})$ は互いに共通部分をもたない.

$$H_1 := W(\sigma^{-1}),\ H_2 := W(\tau^{-1}\sigma),\ H_3 := W(\sigma),\ H_4 := W(\tau\sigma^{-1})$$

とおけばよい. ここで例えば $W(\tau^{-1}\sigma)$ は左端が $\tau^{-1}\sigma$ で始まる G の要素の全体を表す. 実際 H_i ($1 \le i \le 4$) は互いに共通部分をもたず, $I, \tau^2 \notin H_i$ ($1 \le i \le 4$). さらに

$$\sigma(H_1) = \{I\} \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}),\ \tau(H_2) = W(\sigma)$$
$$\sigma^{-1}(H_3) = \{I\} \cup W(\sigma) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}),\ \tau^{-1}(H_4) = W(\sigma^{-1})$$

故に (4) より補題 2 が示された. □

$x \in \Omega$ (すなわち, $x \in \mathbb{R}^3$ かつ $\|x\| \le 1$) とする.

$$Gx := \{\mu x \big|\ \mu \in G\}\ (\subset \Omega)$$

を “x の軌道” と呼ぶ. そのとき, 原点 O ($= (0,0,0)$) の軌道は $\{O\}$ であり, $\|x\| = r$ のとき, $y \in Gx$ ならば $\|y\| = r$ である. 選択公理 ((AC)) を用いて, $\Omega \setminus \{0\}$ の部分集合 X を

$$\mathcal{O}(\subset \Omega):\ \text{軌道 かつ}\ \mathcal{O} \neq \{O\} \Rightarrow X \cap \mathcal{O} = \text{“}1\text{点”}$$

を満たすように選べる. 実際 $\Omega \setminus \{O\}$ の点の軌道の全体を考え, 各軌道から 1 点を選んで, それらの点のつくる集合を X とすればよい. そのとき

$$\text{(5)} \qquad GX = \Omega \setminus \{O\}$$

補題 3: H_i ($1 \leq i \leq 4$) を補題 2 のものとして, $x \in X$ かつ $(H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4)x \not\ni x$ を満たす点 x が存在する.

証明 各 $\mu \in G \setminus \{I\}$ は S^2 ($= \{x \in \mathbb{R}^3 \big| \|x\| = 1\}$) 上ちょうど 2 つの不動点をもつ (μ の回転の軸と S^2 との交点), すなわち各 $\mu \in G \setminus \{I\}$ に対して, $u, v \in S^2$ で

$$u \neq v, \quad \mu u = u, \quad \mu v = v$$

を満たすものが存在し, さらに

$$w \in S^2 \text{ かつ } \mu w = w \Longrightarrow w = u \text{ または } w = v$$

$$D := \{x \in S^2 \big| \mu x = x \text{ なる } \mu \in G \setminus \{I\} \text{ が存在する }\}$$

と定義すると, G が可算集合より D も可算集合. 特に

$$x \in S^2 \setminus D \Longrightarrow (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4)x \not\ni x \tag{6}$$

x の軌道 $(= Gx)$ は高々可算集合であるので, $X \cap S^2$ は非可算集合である. 実際 $X \cap S^2$ が可算集合であると仮定すると, 可算集合の可算個の和集合である S^2 ($= \bigcup_{x \in X \cap S^2} Gx$) も可算集合となり矛盾する. 故に $(X \cap S^2) \setminus D \neq \emptyset$ より $x \in X$ かつ $x \in S^2 \setminus D$ なる x が存在し, (6) より補題 3 が示される. □

補題 4: 次の性質をもつ $\widetilde{\Omega}_i$ ($1 \leq i \leq 4$) が存在する:

$$\widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{4} \widetilde{\Omega}_i \subsetneqq \Omega, \quad \Omega = \sigma(\widetilde{\Omega}_1) \cup \tau(\widetilde{\Omega}_2), \quad \sigma(\widetilde{\Omega}_1) \cap \tau(\widetilde{\Omega}_2) = \emptyset$$

$$\Omega = \{O\} \cup \sigma^{-1}(\widetilde{\Omega}_3) \cup \tau^{-1}(\widetilde{\Omega}_4), \quad \sigma^{-1}(\widetilde{\Omega}_3) \cap \tau^{-1}(\widetilde{\Omega}_4) = \emptyset$$

注意: $O \in \widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2, \quad O \notin \widetilde{\Omega}_i$ ($i = 3, 4$)

証明

$$\widetilde{\Omega}_1 := H_1 X \cup \{O\}, \quad \widetilde{\Omega}'_2 := H_2 X, \quad \widetilde{\Omega}'_3 := H_3 X$$

$$\widetilde{\Omega}_4 := H_4 X, \quad \widetilde{\Omega}_2 := \widetilde{\Omega}'_2 \setminus (\tau^{-1}\sigma(\widetilde{\Omega}_1))$$

$$\widetilde{\Omega}_3 := \widetilde{\Omega}'_3 \setminus (\sigma\tau^{-1}(\widetilde{\Omega}_4))$$

とおく. ここで $H_1 X := \{hy \big| h \in H_1, y \in X\}$. 補題 3 より, $\bigcup_{i=1}^{4} \widetilde{\Omega}_i \subsetneqq \Omega$.

実際, 補題 3 の $x \in X$ に対して, $\{O\} \cup (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4)x \not\ni x$. また $y \in X$ かつ $y \neq x$ ならば X の定義より $Gy \not\ni x$. 故に

$$x \notin \{O\} \cup (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4)X \supset \bigcup_{i=1}^{4} \widetilde{\Omega}_i$$

$\Omega = GX \cup \{O\}$ に注意して,

$$\sigma(\widetilde{\Omega}_1) = \sigma(H_1X) \cup \{O\}, \quad \tau(\widetilde{\Omega}_2) = \tau(H_2X) \setminus \sigma(\widetilde{\Omega}_1)$$

と補題 2 及び (5) より

$$\sigma(\widetilde{\Omega}_1) \cup \tau(\widetilde{\Omega}_2) = GX \cup \{O\} = \Omega$$

同様に

$$\sigma^{-1}(\widetilde{\Omega}_3) \cup \tau^{-1}(\widetilde{\Omega}_4) = GX \ (= \Omega \setminus \{O\})$$

が分かり, 補題 4 が証明される. $\square$

A, B をそれぞれ $a = (0,0,3)$, $b = (0,0,-3)$ を中心とする半径 1 の閉球とする.

補題 5: 次の 4 条件を満たす $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3$ と写像 f: $A \cup B \to \Omega$ が存在する:

(i) $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3$ は互いに共通部分をもたない.

(ii) $A = \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2,\ B = \widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2 \cup \widetilde{B}_3$

(iii) $f(\widetilde{A}_1), f(\widetilde{A}_2), f(\widetilde{B}_1), f(\widetilde{B}_2), f(\widetilde{B}_3)$ は互いに共通部分をもたない.

(iv) f の各 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3$ への制限は, 平行移動と $SO(3)$ の要素による回転に等しい.

証明 写像 $y \mapsto \sigma y + a$ による $\widetilde{\Omega}_1$ の像を $\widetilde{A}_1$
写像 $y \mapsto \tau y + a$ による $\widetilde{\Omega}_2$ の像を $\widetilde{A}_2$

とする. そのとき補題 4 より $\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 = \emptyset$, $A = \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2$. 写像 f の A への制限 $f|_A$ を上の写像の逆写像として定義する. すなわち

$$z \in \widetilde{A}_1 \text{ のとき } f(z) = \sigma^{-1}(z-a), \quad z \in \widetilde{A}_2 \text{ のとき } f(z) = \tau^{-1}(z-a)$$

同様に　写像 $y \mapsto \sigma^{-1}y + b$ による $\widetilde{\Omega}_3$ の像を $\widetilde{B}_1$

　　　　写像 $y \mapsto \tau^{-1}y + b$ による $\widetilde{\Omega}_4$ の像を $\widetilde{B}_2$

また $\widetilde{B}_3 = \{b\}$ とする．補題 4 より点 $p \in \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^4 \widetilde{\Omega}_i\right)$ が存在する．p を b に平行移動で移す写像を考える (写像 $\{p\} \to \widetilde{B}_3$ を考える). そのとき補題 4 より $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{B}_3$ は互いに共通部分をもたず, $B = \widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2 \cup \widetilde{B}_3$. $f|_B$ をこれらの写像の逆写像として定義する．すなわち

$$z \in \widetilde{B}_1 \text{ のとき } f(z) = \sigma(z - b), \quad z \in \widetilde{A}_2 \text{ のとき } f(z) = \tau(z - b)$$
$$z (= b) \in \widetilde{B}_3 \text{ のとき } f(z) = p$$

と定義する．$f|_A$, $f|_B$ より写像 f: $A \cup B \to \Omega$ が定義される．この $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{B}_3$ と写像 f が補題 5 の条件を満たす． □

定理 4 (AC): 集合 Ω_j ($1 \leq j \leq 6$) と A_i, B_i ($1 \leq i \leq 3$) を次を満たすように選べる:

(i) $\Omega_1, \cdots, \Omega_6, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ は互いに共通部分をもたない.

(ii) $\displaystyle \Omega = \bigcup_{j=1}^{6} \Omega_j,\ \ A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i,\ \ B = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$

(iii) $\Omega_i \cong A_i,\ \ \Omega_{3+i} \cong B_i \quad (1 \leq i \leq 3)$

証明 写像 g: $\Omega \to A \cup B$ を $g(y) = y + a$ ($y \in \Omega$) で定義する．そのとき $g(\Omega) = A$. $C := A \cup B$ とおく．補題 5 の f: $C \to \Omega$ は 1 対 1 写像で C を 5 つの部分 $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{B}_3$ に分けて, それぞれで平行移動と回転を組み合わせた写像に等しい．g は平行移動である．

$$D_0 := C \setminus A\ (= B), \quad D_{n+1} := g \circ f(D_n)\ (\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$$

と定義する．そのとき $C \supset D \supset B$ であり,

$$A_i := \widetilde{A}_i \cap D\ (\ i = 1, 2), \quad A_3 := C \setminus D\ (= A \setminus D)$$
$$B_i := \widetilde{B}_i\ (1 \leq i \leq 3)$$
$$\Omega_i := f(A_i)\ (\ i = 1, 2), \quad \Omega_3 := g^{-1}(A_3), \quad \Omega_{3+i} := f(B_i)\ (\ 1 \leq i \leq 3)$$

とおけば, 定理 4 の条件が満たされる. 実際, 補題 5 より $\{\Omega_j\}$ が互いに共通部分をもたず, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{6} \Omega_j$ であることを示せばよい.

$$
\begin{aligned}
&g(\Omega_i) = g \circ f(A_i) \subset g \circ f(D) \subset D \ (\ i = 1, 2), \quad g(\Omega_3) = A_3 = C \setminus D \\
&g(\Omega_{3+i}) = g \circ f(B_i) \subset D \ (\ 1 \leq i \leq 3)
\end{aligned}
$$

及び $g \circ f$ が 1 対 1 であることと補題 5 より $g(\Omega_i)$ ($1 \leq i \leq 6$) は互いに共通部分をもたないこと, したがって Ω_i ($1 \leq i \leq 6$) が互いに共通部分をもたないことが分かる. また

$$
\begin{aligned}
&\Omega_1 \cup \Omega_2 = f((\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2) \cap D) = f(A \cap D) \\
&\Omega_3 = g^{-1}(C \setminus D) = g^{-1}(A \setminus (D \cap A)) \quad (\because D \supset B) \\
&\bigcup_{i=1}^{3} \Omega_{3+i} = f(\widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2 \cup \widetilde{B}_3) = f(B)
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
g\Bigl(\bigcup_{j=1}^{6} \Omega_j\Bigr) = (g \circ f(A \cap D)) \cup (g \circ f(B)) \cup (A \setminus (D \cap A))
$$

$D_0 = B$, $D_n \subset A$ ($n \geq 1$) より

$$
A \cap D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \qquad \therefore g \circ f(A \cap D) = \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n
$$

また $g \circ f(B) = D_1$,

$$
A \setminus (D \cap A) = A \setminus \Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Bigr)
$$

故に

$$
g\Bigl(\bigcup_{j=1}^{6} \Omega_j\Bigr) = A \qquad \therefore \bigcup_{j=1}^{6} \Omega_j = \Omega \qquad \square
$$

定理 3 の証明のために記号を用意する. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ に対して

・ $A \sim B$
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$N \in \mathbb{N}$, $A_1, \cdots, A_N$ ($\subset A$), $B_1, \cdots, B_N$ ($\subset B$) を次を満たすように選べる:

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ \ B_i \cap B_j = \emptyset \quad (\ i \neq j)$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i, \quad A_i \cong B_i \ \ (\ 1 \leq i \leq N)$$

・ $A \preceq B$

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

B の部分集合 C で $A \sim C$ となるものが存在する.

と定義する. $\sim$ は $\mathbb{R}^3$ の同値関係になる.

補題 6 (Banach-Schröder-Bernstein の定理): $A, B \subset \mathbb{R}^3$ に対して

$$A \preceq B,\ B \preceq A \implies A \sim B$$

注意: この補題より $\preceq$ は $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)/\sim$ の順序になる.

証明 (i) $A \sim B$ ならば, 全単射写像 g: $A \to B$ で任意の $C \subset A$ に対して $C \sim g(C)$ を満たすものがとれる. 実際, 仮定より $N \in \mathbb{N}$, A_i ($\subset A$), B_i ($\subset B$), $g_i \in G_3$ ($1 \leq i \leq N$) を

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i, \quad B_i = g_i(A_i) \ (\ 1 \leq i \leq N)$$

を満たすように選べる. ここで G_3 は $\mathbb{R}^3$ の平行移動と回転の生成する群を表す. そのとき g: $A \to B$ を

$$g(x) = g_i(x) \quad (\ x \in A_i)$$

と定義すれば, $C = \bigcup_{i=1}^{N}(C \cap A_i)$ とかいて,

$$g(C) = \bigcup_{i=1}^{N} g_i(C \cap A_i) \qquad \therefore C \sim g(C)$$

(ii) $A_i \sim B_i$ ($i = 1, 2$) かつ $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ならば $(A_1 \cup A_2) \sim (B_1 \cup B_2)$ である (明らか).

今 $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A \sim B_1$ かつ $A_1 \sim B$ と仮定する. (i) より全単射 f: $A \to B_1$ 及び g: $A_1 \to B$ を

$$C \subset A \Rightarrow C \sim f(C), \quad D \subset A_1 \Rightarrow D \sim g(D)$$

を満たすように選べる. 帰納的に

$$C_0 := A \setminus A_1, \quad C_{n+1} := g^{-1} \circ f(C_n) \ (\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定義し, また $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ とおく. そのとき $A \setminus C \subset A \setminus C_0 = A_1$ に注意して,

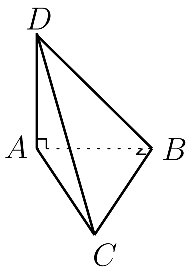
$$g(A \setminus C) = B \setminus f(C) \tag{7}$$

が分かる. 実際 $y \in B$, $y \notin g(A \setminus C)$ とすると, $A_1 = A \setminus C_0$ と $A \setminus C = A_1 \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big)$ より, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ かつ $y = g(x)$ を満たす x が存在する. 故に $n \in \mathbb{N}$ と $x_0 \in C_0$ を $y = g \circ (g^{-1} \circ f)^n(x_0)$ $(= f \circ ((g^{-1} \circ f)^{n-1}(x_0))$ を満たすように選べる. これより $y \in f(C)$ が分かり, $y \notin B \setminus f(C)$. 次に $y \in B$, $y \notin B \setminus f(C)$ とする. そのとき $y \in f(C)$ より, 非負整数 m と $x_0 \in C_0$ で $y = f \circ (g^{-1} \circ f)^m(x_0)$ を満たすものが存在する. 故に $g^{-1}(y) = (g^{-1} \circ f)^{m+1}(x_0) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. 故に $y \in g\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big)$. よって $y \notin g\Big(A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = g(A \setminus C)$. 故に (7) が分かる. (7) と g の選び方より, $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. 一方 f の選び方より, $C \sim f(C)$. 故に (ii) より

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B \qquad \square$$

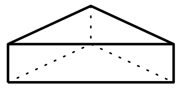
定理 3 の証明 : $A \preceq B$ (及び $B \preceq A$) を示せば, 補題 6 によって定理 3 が証明されたことになる. 定理 3 の仮定より, 閉球 K, L で $A \subset K$, $L \subset B$ を満たすものが存在する. そのとき $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって, K は L の nヶのコピーで覆われる (すなわち $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i(L)$ を満たす $g_i \in G_3$ ($1 \leq i \leq n$) が存在する). S を L の nヶのコピーとすると, 定理 2 (または定理 4) を有限回適用して $S \preceq L$. 故に $A \subset K \preceq S \preceq L \subset B$ より $A \preceq B$.

6.　付録

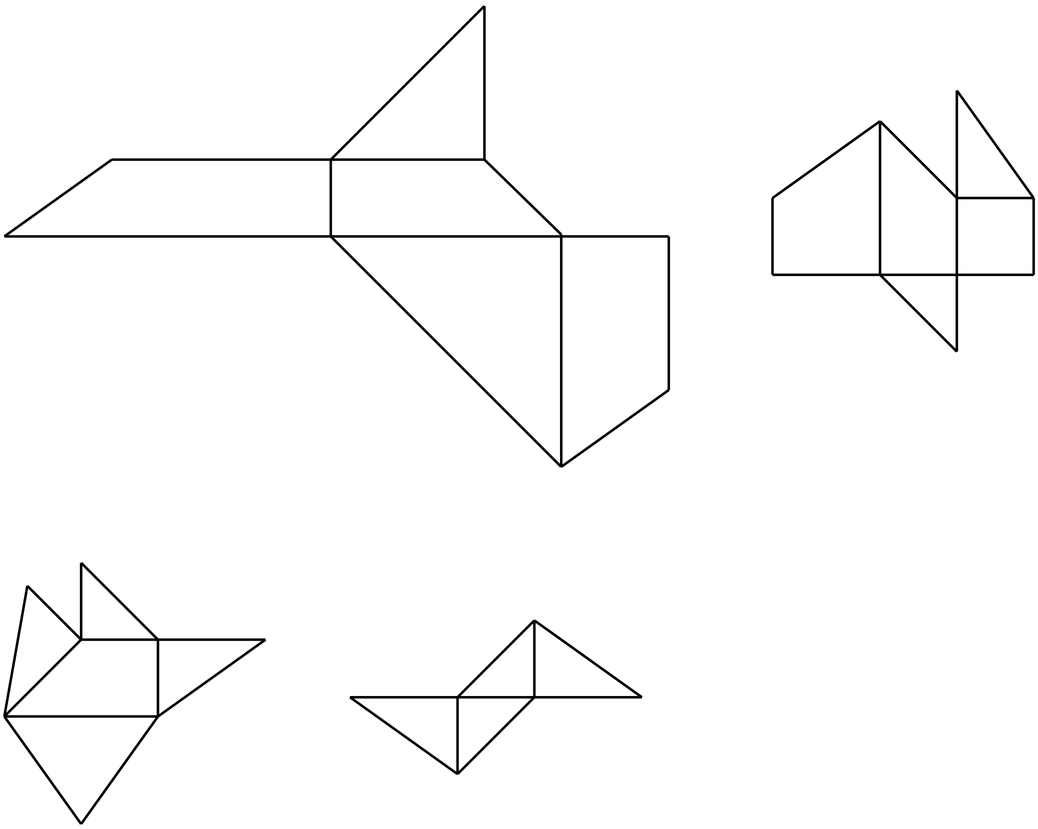


$AB = BC = AD$

$\angle BAD$
$= \angle ABC$
$= \angle CAD$
$= 90^\circ$



左上の四面体は Hill の四面体と呼ばれ, 右上の立体は Hill の四面体と同じ底面と同じ体積をもつ三角柱である．また以下の４図形はそれぞれ立体の展開図であり, これらの立体をつなぎ合わせて, Hill の四面体を作ることができる．またこれら４つの立体から右上の三角柱を作ることもできる．三角柱を有限個の小多面体に分けてそれらをつなぎ合わせて, 同じ体積の立方体を作ることができる．実際例えば稜 (辺) AB の長さを 1 とすれば, 体積は $\dfrac{1}{6}$ となり, 定理 1 の証明中の方法を適用して, 上の三角柱



から各稜の長さが 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ である直方体を作れる．さらに各稜の長さが 1, 1, $\frac{1}{6}$ である直方体を作れる．一方体積 $\frac{1}{6}$ の立方体から同様にして, 各稜の長さが 1, $6^{-2/3}$, $6^{-1/3}$ である直方体を作れる．さらに各稜の長さが 1, 1, $\frac{1}{6}$ である直方体を作れる．以上より Hill の四面体を小多面体に分けてこれらをつなぎ合わせて, 同じ体積の立方体を作れることが分かる.

参考文献

[W] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Be] Richard Beals, Analysis, An Introduction, Cambridge Univ. Press, 2004.

[Bo] Vladimir G. Boltianskii, Hibert's Third Problem, trans. by R. Silverman, Winston, 1978.