# 微積分 II 演習問題

2005 年度 3 学期　若林

## 命題と論理記号

命題とは、正しい (真) か誤っている (偽) かが数学的にはっきりと定まっている文章 (主張) のことをいう。

### A. 論理記号

命題を結びつけて新しい命題をつくるのに論理記号が使われる。$A$、$B$、$\cdots$ で命題を表すことにする。

| | |
|---|---|
| $\vee$ (または) | $A \vee B$ は "$A$ または $B$ の少なくとも一方は成り立つ" という命題を表す (論理和)。 |
| $\wedge$ (かつ) | $A \wedge B$ は "$A$ と $B$ の両方が成り立つ" という命題を表す (論理積)。 |
| $\rightarrow$ (ならば) | $A \rightarrow B$ は "$A$ が成り立てば $B$ も成り立つ" という命題を表す。 |
| $\neg$ (否定) | $\neg A$ は "$A$ でない" という命題を表す。 |
| $\equiv$ (同等) | $A \equiv B$ は $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ という命題 ($A$ と $B$ は同等) を表す。 |
| $\forall x$ (全称記号) | $\forall x\, F(x)$ は "すべての $x$ に対して $F(x)$ ($x$ に関する命題) が成り立つ" という命題を表す。 |
| $\exists x$ (存在記号) | $\exists x\, F(x)$ は "$F(x)$ が成り立つような $x$ が少なくとも一つ存在する" という命題を表す。 |

### B. 使い方

数学の講義や演習では論理記号と日本語 (または英語) を併用して用いるのが普通である (人によって表現に差がある)。定理・命題などの数学的な主張の内容が相手方に誤解なく正確に伝わるように表現することが基本である。

**例 1**　数列 $\{a_n\}$ と実数 $a$ に対して、以下の (i) 〜 (vii) は同じ (同等な) 命題を表現している。

(i) 任意の正数 $\varepsilon$ に対して、自然数 $N$ で "$n \geq N$ ならば $|a - a_n| < \varepsilon$" を満たすものが存在する。

(ii) 任意の正数 $\varepsilon$ に対して、次を満たす自然数 $N$ が存在する。
$n \geq N$ ならば $|a - a_n| < \varepsilon$

(iii) 任意の正数 $\varepsilon$ に対して、(ある) 自然数 $N$ が存在して、
$n \geq N$ ならば $|a - a_n| < \varepsilon$ である (が成り立つ)。

(iv) For any $\varepsilon > 0$ there exists $N \in \mathbf{N}$ such that $|a - a_n| < \varepsilon$ if $n \geq N$.
注) $\mathbf{N}$ は自然数全体のつくる集合を表す。

(v) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}$ s.t. "$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$"

(vi) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$: "$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$"

(vii) $\forall\varepsilon\Big[\{(\varepsilon\in\mathbf{R})\wedge(\varepsilon>0)\}$

$$\rightarrow\Big\{\exists N\Big((N\in\mathbf{N})\wedge\big(\forall n\big(((n\in\mathbf{N})\wedge(n\geq N))\rightarrow(|a-a_n|<\varepsilon)\big)\big)\Big)\Big\}\Big]$$

注) $\mathbf{R}$ は実数全体のつくる集合を表す。

**普通、講義や演習では (iii)、(v)、(vi) タイプの表現が用いられる。**

**例 2** 次の (i) 〜 (v) は同じ (同等な) 命題を表現している。

(i) 任意の自然数 $n$ に対して $n^2\geq n$ が成り立つ。

(ii) $\forall n\in\mathbf{N}$ に対して $n^2\geq n$

(iii) $n^2\geq n$ ( $\forall n\in\mathbf{N}$)

(iv) $\forall n\in\mathbf{N}\ n^2\geq n$

(v) $\forall n\{(n\in\mathbf{N})\rightarrow(n^2\geq n)\}$

**普通、講義や演習では (ii)、(iii) タイプの表現が用いられる。**

**C. 注意**

- $(A\rightarrow B)\equiv\{(\neg A)\vee B\}$
(“$A\rightarrow B$” $\Leftrightarrow$ “$(\neg A)\vee B$” すなわち、“$A\Rightarrow B$” は “$A$ でないかまたは $B$ である” という命題と同じ (同等))

- $\{\neg(A\vee B)\}\equiv\{(\neg A)\wedge(\neg B)\}$
(“$\{\neg(A\vee B)\}$ は “$A$ でなくかつ $B$ でない” という命題と同じ)
$\{\neg(A\wedge B)\}\equiv\{(\neg A)\vee(\neg B)\}$
(“$\{\neg(A\wedge B)\}$ は “$A$ でないかまたは $B$ でない” という命題と同じ)
これらはド・モルガンの法則と呼ばれる。

- $\{\neg(\forall x\,F(x))\}\equiv\{\exists x(\neg F(x))\}$
($\forall x\,F(x)$ の否定命題は “$F(x)$ が成り立たない $x$ が存在する” という命題と同じ)

- $\{\neg(\exists x\,F(x))\}\equiv\{\forall x(\neg F(x))\}$
($\exists x\,F(x)$ の否定命題は “どんな $x$ に対しても $F(x)$ が成り立たない” という命題と同じ)

- $\{\neg(A\rightarrow B)\}\equiv\{A\wedge(\neg B)\}$

- $(A\rightarrow B)\equiv\{(\neg B)\rightarrow(\neg A)\}$

**例 3** 数列 $\{a_n\}$ と実数 $a$ に関する命題

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}\ \text{s.t. “}n\geq N\Rightarrow|a-a_n|<\varepsilon\text{”}$$

の否定命題をつくろう。命題の先頭から順に否定をつくればよい。

**第 1 段:** $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\{$ ( $\exists N\in\mathbf{N}$ s.t. “$n\geq N\Rightarrow|a-a_n|<\varepsilon$”) が成り立たない $\}$

**第 2 段:** $\exists\varepsilon > 0$ s.t. $\{\ \forall N \in \mathbf{N}$ に対して (“$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$” が成り立たない)$\}$

**第 3 段:** 命題 “$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$” の否定命題をつくる必要がある。この命題をもう少し厳密に書くと

$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して、$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$

( *i.e.* $\forall n[\{(n \in \mathbf{N}) \wedge (n \geq N)\} \to (|a - a_n| < \varepsilon)]$)

故に否定命題は

$\exists n \in \mathbf{N}$ s.t. “$n \geq N$ かつ $|a - a_n| \geq \varepsilon$”

故に

$\exists\varepsilon > 0$ s.t. ($\forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}$ s.t. “$n \geq N$ かつ $|a - a_n| \geq \varepsilon$”)

または、

$\exists\varepsilon > 0$ s.t. “$\forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N$ s.t. $|a - a_n| \geq \varepsilon$”

(これはさらに次のようにも表現される。

$\exists\varepsilon > 0, \exists\{n_j\} \subset \mathbf{N}$ s.t.

“$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ かつ $|a - a_{n_j}| \geq \varepsilon$ ( $j = 1, 2, 3, \cdots$)”)

**D. 証明法**

**背理法** 命題 $A$ が成り立つことを証明するには、$A$ が成り立たないと仮定して、矛盾を導けばよい。この証明法を背理法という。また命題「$A \Rightarrow B$」が成り立つことを証明するには、仮定 $A$ の下で結論 $B$ が成り立たないと仮定して、矛盾を導けばよい。背理法は当然成り立つと思われる命題を証明するのによく用いられる。

**帰納法** 自然数 $n$ に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 $n$ に対して真であること (すなわち「$\forall n\{(n \in \mathbf{N}) \to P(n)\}$」が真であること) を証明するために、次の順序で示していく証明法を (数学的) 帰納法と呼ぶ。

(i) $P(1)$ が成り立つことを示す。

(ii) $n > 1$ なる自然数 $n$ に対して、「$\{(k \in \mathbf{N}) \wedge (k < n)\} \to P(k)$」が成り立つこと仮定して、$P(n)$ が成り立つことを示す。

**1-1.** 次の命題を論理記号を使って書き直せ (例 1 の (v)、(vi)、(vii) のいずれかの表現で)。

(1) 任意の自然数 $n$ に対して $n \neq n^2$ である。

(2) $r$ が有理数ならば $P(r)$ は有理数
注) $\mathbf{Q}$ で有理数全体のつくる集合を表す。

(3) $0 < r < 1$ を満たす有理数 $r$ が存在する。

(4) 任意の実数 $a$ に対して自然数 $n$ が存在して、$a < n$ が成り立つ。

**1-2.** 次の命題を文章で書き下せ (例 1 の (i)、(ii)、(iii) のいずれかの表現で)。

(1) $\forall x \in \mathbf{Z}\ x^2 \in \mathbf{Z}$
注) ここで $\mathbf{Z}$ は整数全体のつくる集合を表す。

(2) $\forall a \geq 0\ \exists x \in \mathbf{R}$: $x^2 = a$

(3) $\exists M > 0$: $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n < M$

(4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: “$(x \in \mathbf{R}$ かつ $|x - a| < \delta) \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$”

**1-3.** 「ある $M > 0$ が存在して、 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq M$」 という命題の否定命題をつくれ。

**1-4.** 「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある自然数 $n$ が存在して $n\varepsilon > 1$」という命題の否定命題をつくれ。

**1-5.** 「ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して $x$ を適当に選ぶと、$|x| < \delta$ かつ $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ が成り立つ」という命題の否定命題をつくれ。

**1-6.** 前問 1 及び 2 の命題 (1) 〜 (4) の否定命題をつくれ。

**1-7.** 前問 2 (4) の否定命題は次の命題と同等であることを示せ。

$\exists \varepsilon > 0\ \exists \{x_n\} \subset \mathbf{R}$: “$|a - x_n| < \dfrac{1}{n}$ かつ $|f(a) - f(x_n)| \geq \varepsilon$”

但し、“$\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbf{N}$ s.t. $\dfrac{1}{n} < \delta$” が成り立つことを用いてよい。

**1-8.** 数列 $\{a_n\}$ と実数 $a$ に関する命題 $A$、$B$、$C$、$D$ をそれぞれ

$A$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$: “$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$”
$B$: $\exists \varepsilon > 0$: $\forall N \in \mathbf{N}\ (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon)$
$C$: $\exists N \in \mathbf{N}$: $\forall \varepsilon > 0\ (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon)$
$D$: $\forall N \in \mathbf{N}\ \exists \varepsilon > 0$: “$n \geq N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$”

とする。

(1) これらの命題の違いを説明せよ。

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$ ( $n = 1, 2, \cdots$)、$a = 0$ のとき、命題 $A$、$B$、$C$、$D$ の真偽を判定せよ。

(3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ ( $n = 1, 2, \cdots$)、$a = 1$ のとき、命題 $A$、$B$、$C$、$D$ の真偽を判定せよ。

(4) $a_n = n$ ( $n = 1, 2, \cdots$)、$a = 0$ のとき、命題 $A$、$B$、$C$、$D$ の真偽を判定せよ。

**1-9.** $a > b$ ならば、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $a > b + \varepsilon$ が成り立つ。このことを示せ。

**1-10.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a < b + \varepsilon$ が成り立つならば、$a \leq b$ であることを示せ。

**1-11.** 二つの実数 $a$、$b$ について $a = b$ であるための必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|a - b| < \varepsilon$ が成り立つことである。このことを示せ。

**1-12.** 三角不等式 ($\forall x, y \in \mathbf{R}$ に対して $|x + y| \leq |x| + |y|$) を用いて、任意の実数 $x$, $y$ に対して $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ が成り立つことを示せ。

**数列の収束**

- $\{a_n\}$ ( $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 等ともかく) を (実) 数列とする。
  $\{a_n\}$ が実数 $a$ に収束する
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}$ s.t. "$n\geq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$"
  このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$、$a_n\to a$ ( $n\to\infty$) 等と記す。
  注) 上の定義において $n$ は自然数であると暗黙の内に認めているので、わざわざ断らないのが普通だが、厳密には次のようになる。
  $\{a_n\}$ が実数 $a$ に収束する
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}$ s.t. "($n\in\mathbf{N}$ かつ $n\geq N$) $\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$"

- $\{a_n\}$ が実数 $a$ に収束しない
  $\Longleftrightarrow$
  $\exists\varepsilon>0$ s.t. "$\forall N\in\mathbf{N},\ \exists n\geq N$ s.t. $|a_n-a|\geq\varepsilon$"
  $\Longleftrightarrow$
  $\exists\varepsilon>0,\ \exists\{n_j\}\subset\mathbf{N}$ s.t.
  "$n_1<n_2<n_3<\cdots$ かつ $|a-a_{n_j}|\geq\varepsilon$ ( $j=1,2,3,\cdots$)"
  ( p2 の例 3 参)

- $\{a_n\}$ が収束しない (発散する)
  $\Longleftrightarrow$
  $\forall a\in\mathbf{R},\ \exists\varepsilon>0$ s.t. "$\forall N\in\mathbf{N},\ \exists n\geq N$ s.t. $|a_n-a|\geq\varepsilon$"
  $\Longleftrightarrow$
  $\forall a\in\mathbf{R},\ \exists\varepsilon>0,\ \exists\{n_j\}\subset\mathbf{N}$ s.t.
  "$n_1<n_2<n_3<\cdots$ かつ $|a-a_{n_j}|\geq\varepsilon$ ( $j=1,2,3,\cdots$)"

**2-1.** 数列 $\{a_n\}$ の極限は、存在すれば唯一つであることを示せ。
Hint) (背理法を用いて証明する) $a_n\to a,\ a_n\to b$ ( $n\to\infty$) かつ $a\neq b$ と仮定して、矛盾を導く。

**2-2.** 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、ある $M>0$ が存在して、任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して $|a_n|\leq M$ (すなわち、"$\exists M>0$ s.t. $|a_n|\leq M$ ( $\forall n\in\mathbf{N}$)") が成り立つことを示せ。

**2-3.** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$、$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば、$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ が成り立つことを示せ。

**2-4.** $a_n=(-1)^{n-1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は収束しないことを示せ。

**2-5.** 数列 $\{a_n\}$ は 0 でない実数に収束するとする。このときある $N\in\mathbf{N}$ と $c>0$ が存在して、$n\geq N$ ならば $|a_n|>c$ が成り立つことを示せ。
Hint) $a_n\to a$ ( $n\to\infty$) として、例えば $c=|a|/2$ ととれる。そのとき不等式 $|a_n|\geq$

$|a| - |a_n - a|$ を用いる。

**2-6.** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$、$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ が成り立つことを示せ。さらに $b_n \neq 0$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) かつ $b \neq 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ が成り立つことを示せ。
Hint) 前半の証明では、問 2 を用いる。後半を示すには、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ を示せば十分。問 5 より、$b \neq 0$ ならば $\exists N \in \mathbf{N},\ \exists M > 0$ s.t. "$n \geq N \Rightarrow |b_n| \geq M^{-1}$" が成り立つ。

**2-7.** $a_n \to a$ ( $n \to \infty$)、$b_n \to b$ ( $n \to \infty$) かつ $a_n \leq b_n$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) ならば、$a \leq b$ であることを示せ。
Hint) (背理法) $a > b$ と仮定して矛盾を導く。

**2-8.** $a_n \to a$ ( $n \to \infty$) ならば $|a_n| \to |a|$ ( $n \to \infty$) であることを示せ。

**2-9.** $a_n \to a$、$b_n \to a$ ( $n \to \infty$ )、$a_n \leq c_n \leq b_n$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) ならば、$c_n \longrightarrow a$ ( $n \to \infty$) であることを示せ。

### 実数の連続性の公理

自然数を既知とすれば、零や負の数 (すなわち整数) を定義することは難しくない。また「零でない整数」分の「整数」である分数を考えれば、有理数を定義することも難しくない。ここまでは単なる代数的操作で済むが、実数を定義するには連続性や極限の概念が必要になる。もしきちんと微積分を勉強するというのであれば、実数を有理数から如何に構成する (つくる) かを学ぶべきであろう。実数は、有理数の Dekind 切断や、有理数の Cauchy 列を用いて (Cantor による)、定義することができる。しかし微積分の講義では、普通実数を構成せずに実数のもっている基本的な性質を証明なしで認めることにしている。理由は簡単で、微積分の講義を必要以上に難しいものにしないためと、時間的な制約のためである。したがって、本来証明すべきである実数の性質を、実数の連続性の公理として、証明なしに正しいものとして認めることにしている。

**実数の連続性の公理:** 上に有界な単調増加数列は必ず収束する。すなわち

数列 $\{a_n\}$ に対して、
「$\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $a_n \leq M$ ( $\forall n \in \mathbf{N}$)」かつ「$(n, m \in \mathbf{N}$ かつ $m < n) \Rightarrow a_m \leq a_n$」
が成り立つならば、
「$\exists a \in \mathbf{R}$ s.t. $a_n \to a$ ( $n \to \infty$)」
である。

### 上限・下限

$E$ を実数の部分集合とする (すなわち $E \subset \mathbf{R}$)。

- $E$ は上に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. "$x \in E \Rightarrow x \leq M$"
  この $M$ を $E$ の上界という。
- $E$ は下に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. "$x \in E \Rightarrow x \geq M$"
  上を満たす $M$ を $E$ の下界という。

- 集合 $\{M \in \mathbf{R} | \ M$ は $E$ の上界$\}$ の最小値が存在するとき、$E$ は上限を持つといい、この値を上限と呼び $\sup E$ で表す。すなわち、$a = \sup E$ であるとは、$a$ が
  (i) $a$ は $E$ の上界 ($i.e.\ x \le a\ (\ \forall x \in E)$)
  (ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$a - \varepsilon$ はもはや $E$ の上界ではない
  ($i.e.\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E$ s.t. $x > a - \varepsilon$ )
  を満たすときをいう。

- 集合 $\{M \in \mathbf{R} | \ M$ は $E$ の下界$\}$ の最大値が存在するとき、$E$ は下限を持つといい、この値を下限と呼び $\inf E$ で表す。

**Cauchy (コーシー) 列**

数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ s.t. "$m, n \ge N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$"
(これを $|a_m - a_n| \to 0\ (\ m, n \to \infty)$ と略記する)

**Archimedes (アルキメデス) の性質 (公理)**

実数の連続性の公理より

$\forall a \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}$ s.t. $a < n$

を示すことができる。これを Archimedes の性質という。実数の連続性の公理としてここことは異なる別のものを採用したときは、その公理からは Archimedes の性質が証明できない場合がある。その場合には Archimedes の性質を公理に採用する必要がある。

**実数の連続性の公理の同値 (同等) 性**

実数の連続性の公理は以下の各命題と同等である (微積の教科書参)。
(i) 区間縮小法 ＋ Archimedes の公理
(ii) 「空でない上に有界な実数の部分集合は必ず上限をもつ」( Weierstrass の定理)
(iii) 「Cauchy 列は必ず収束する」＋ Archimedes の公理
(iv) 「有界数列は必ず収束する部分列を含む」( Borzano-Weierstrass の定理)
(v) Dedekind 切断

**2-10.** $\mathbf{R}$ の空でない部分集合 $E$ と $\alpha > 0$ に対し、$\alpha E := \{\alpha x | \ x \in E\}$ とおく。$E$ が上に有界のとき、$\sup(\alpha E) = \alpha \sup E$ であることを示せ。
Hint) $a := \sup E$ とおいて、 (i) $x \le \alpha a\ (\ \forall x \in \alpha E)$ (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \alpha E$ s.t. $x > \alpha a - \varepsilon$ が成り立つことをいえばよい。

**2-11.** $\mathbf{R}$ の空でない部分集合 $E$ に対し、$-E := \{-x | \ x \in E\}$ とおく。$E$ が下に有界のとき、$\sup(-E) = -\inf E$ であることを示せ。
Hint) $a = \inf E \Leftrightarrow$ (i) $x \ge a\ (\ \forall x \in E)$ (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E$ s.t. $x < a + \varepsilon$

**2-12.** 数列 $\{a_n\}$ が上に有界で単調増加ならば、実数の連続性の公理より $\{a_n\}$ は収束するが、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | \ n \in \mathbf{N}\}$$

が成り立つことを示せ。
Hint) 例えば $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とおいて、$a_n \leq a$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) であり、$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $a_N > a - \varepsilon$ である。

**2-13.** 数列 $\{a_n\}$ が発散するための必要十分条件は

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. ``}\forall N \in \mathbf{N},\ \exists m, n \geq N \text{ s.t. } |a_m - a_n| \geq \varepsilon\text{''}$$

であることを示せ。
Hint) 教科書 P145 の Cauchy 列と収束列の同値性を用いる。

**2-14.** $a > 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ であることを示せ。
Hint) $a > 1$ のときは $\{\sqrt[n]{a}\}$ は単調減少数列。

**2-15.** 実数の連続性の公理を用いて Archimedes の性質を証明せよ。

**2-16.** $E = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right\}$ のとき、$\sup E = 1$ であることを示せ。
Hint) Archimedes の性質も用いる。

**2-17.** $a_n = 1 + \frac{2}{n}$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) のとき、数列 $\{a_n\}$ が 1 に収束することを定義に戻って示せ。
Hint) Archimedes の性質を用いる。

**2-18.** 相異なる 2 つの有理数 (無理数) の間に必ず無理数 (有理数) が存在することを示せ。
Hint) $a$ が有理数かつ $a > 0$ のとき、$\sqrt{2}$ が無理数であることを既知として、$\sqrt{2} < a$ と $a < \sqrt{2}$ の場合に分けて、0 と $a$ の間に無理数が存在することを示せ。後者の場合は $\sqrt{2}/a$ に Archimedes の性質を用いよ。

**2-19.** $|r| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であることを示せ。
Hint) まず $\{|r|^n\}$ が単調減少数列で $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ であることを示せ。

**2-20.** Borzano-Weierstrass の定理を真と認めて、逆に実数の連続性の公理を証明せよ。

**2-21.** $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \alpha$ のとき、$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$ を示せ。
Hint) $n > m$ に対して、$\left(\frac{a_n}{n} - \alpha\right) = \frac{a_m}{n} - \frac{m\alpha}{n} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(a_{k+1} - a_k) - \alpha}{n}$ である。$\varepsilon > 0$ に対して、$m$ を $k \geq m \Rightarrow |(a_{k+1} - a_k) - \alpha| < \varepsilon$ と選ぶ。

**関数の極限**

- $a < c < b$ とし、 $f(x)$ が区間 $(a,c)$ と区間 $(c,b)$ で定義されているとする。

  $\lim_{x\to c} f(x) = A$ ( または $f(x) \to A$ ( $x \to c$))

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

  "$(x \in (a,c) \cup (c,b)$ かつ $|x-c| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$"

  このとき、$A$ を $x \to c$ のときの $f(x)$ の極限値という。

- $f(x)$ が区間 $(a,b)$ で定義されているとする。

  $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ ( または $f(x) \to A$ ( $x \to a+0$))

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

  "$(x \in (a,b)$ かつ $a < x < a+\delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$"

  このとき、$A$ を $x = a$ における $f(x)$ の右極限値という。同様に

  $\lim_{x\to b-0} f(x) = B$ ( または $f(x) \to B$ ( $x \to b-0$))

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

  "$(x \in (a,b)$ かつ $b-\delta < x < b) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$"

  このとき、$B$ を $x = b$ における $f(x)$ の左極限値という。

  注) $\lim_{x\to c} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to c+0} f(x) = \lim_{x\to c-0} f(x) = A$

- $f(x)$ が区間 $(a,\infty)$ で定義されているとする。

  $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ ( または $f(x) \to A$ ( $x \to \infty$))

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a$ s.t. "$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$"

- $f(x)$ が区間 $(-\infty,a)$ で定義されているとする。

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ ( または $f(x) \to A$ ( $x \to -\infty$))

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists M < a$ s.t. "$x < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$"

**連続関数の定義 (1)**

$f(x)$ を区間 $I$ で定義されてた関数とする。

- $a \in I$ で $f(x)$ が連続である

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  (i) $a$ が区間 $I$ の端点でないとき

  $$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

  (ii) $a$ が区間 $I$ の左端 (右端) の点のとき

  $$f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x) \quad ( f(a) = \lim_{x\to a-0} f(x))$$

$\Longleftrightarrow$ ( 関数の極限の定義より)

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t. “($x \in I$ かつ $|x-a| < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$”

( これが連続の定義だと思ってよい)

- $f(x)$ が区間 $I$ で連続である

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $I$ の各点で $f(x)$ が連続 ( *i.e.* $\forall a \in I$ に対して $f(x)$ が $x = a$ で連続)

  $\Longleftrightarrow$

  $(*)$ $\forall a \in I, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t.

  “($x \in I$ かつ $|x-a| < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$”

  注) $(*)$ で $\delta$ は一般に $a$ と $\varepsilon$ ( と $f$) に依存して定まる正数である。

**連続関数の定義 (2)**

$f(x)$ が $\mathbf{R}$ の部分集合 $D$ で定義されているとする。

- $a \in D$ で $f(x)$ が連続である

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t. “($x \in D$ かつ $|x-a| < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$”

- $f(x)$ が $D$ で連続

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $D$ の各点で $f(x)$ が連続

**連続関数の性質**

$-\infty < a \leq b < \infty$ とし、$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数とする。

- (中間値の定理) 簡単のために $f(a) \leq f(b)$ と仮定しておく。このとき

  $\forall C \in [f(x), f(b)], \exists\xi \in [a, b]$ s.t. $C = f(\xi)$

- (Weierstrass(ワイエルシュトラス) の定理)

  $\exists\xi, \eta \in [a, b]$ s.t. $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$ ( $\forall x \in [a, b]$)

  ( すなわち区間 $[a, b]$ で $f(x)$ は最小値と最大値をもつ)

- (一様連続性) $f(x)$ は $[a, b]$ で一様連続である。すなわち

  $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ s.t. “($x, y \in [a, b]$ かつ $|x-y| < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$”

  注) 区間 $[a, b]$ で連続であることを意味する上の $(*)$ と比較せよ ( $\delta$ は (関数 $f$ と) $\varepsilon$ のみに依存して定まる)。

**3-1.** $x_n \in [a, b]$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) かつ $x_n \to c$ ( $n \to \infty$) ならば $c \in [a, b]$ であることを示せ。

Hint) はさみうちの定理を用いて証明できるが、ここでは背理法と収束の定義を用いて証

明せよ。

**3-2.** 区間 $I$ で定義された関数 $f(x)$ と $a \in I$ に対して、次の２つの条件が互いに同値であることを示せ。

(1) $f(x)$ は $x = a$ で連続

(2) $a_n \in I$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) かつ $a_n \to a$ ( $n \to \infty$) ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

Hint) "(2) $\Rightarrow$ (1)" は背理法を用いて示せ。

**3-3.** $f(x)$ が $x = a$ で連続ならば、$|f(x)|$ も $x = a$ で連続であることを示せ。

**3-4.** 関数 $y = \dfrac{1}{x}$ は区間 $(0, 1]$ で連続であるが、一様連続でないことを示せ。また区間 $[1, \infty)$ ではどうか。

**3-5.** $f(x)$ が $x = a$ で連続で $g(x)$ が $x = f(a)$ で連続であれば、合成関数 $g(f(x))$ は $x = a$ で連続であることを示せ。

**3-6.** $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、$f(a) < C < f(b)$ であると仮定する。

(1) $c \in I$ かつ $f(c) < C$ であるならば、
$\exists\delta > 0$ s.t. "($x \in I$ かつ $|x - c| < \delta$) $\Rightarrow f(x) < C$"
が成り立つことを示せ。
注) 同様に、$c \in I$ かつ $f(c) > C$ であるならば、
$\exists\delta > 0$ s.t. "($x \in I$ かつ $|x - c| < \delta$) $\Rightarrow f(x) > C$"
が成り立つ。

(2) $\xi := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq C\}$ ( 実数の連続性より、上限は存在）とおくとき、(1) と背理法を用いて $f(\xi) \geq C$ であることを示せ。

(3) (2) の $\xi$ に対して $x > \xi$ ならば $f(x) > C$ であることを、背理法を用いて示せ。

(4) (2) の $\xi$ に対して $f(\xi) \leq C$ を (1) の注)、(3) と背理法を用いて示せ。

注) (2)、(4) より $f(\xi) = C$ が示されたことになる。

**3-7.** $f(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数とし、$f(x)$ が $[a, b]$ で最大値をもつことを、

| **Borzano-Weierstrass の定理**: 有界数列は必ず収束する部分列を含む |
|---|

を用いて、次の順で証明せよ。

(1) 命題: $\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $f(x) \leq M$ ( $\forall x \in [a, b]$)
が成立しないと仮定すると、
$\exists a_n \in [a, b]$ ( $n = 1, 2, \cdots$ ) s.t. $f(a_n) > n$
であることを示せ。

(2) Borzano-Weierstrass の定理を適用して矛盾を導き、
$\exists M \in \mathbf{R}$ s.t. $f(x) \leq M$ ( $\forall x \in [a, b]$)
を示せ。

(3) $A := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ( (2) と実数の連続性より、上限は存在) とおけば、

$$\exists a_n \in [a,b] \ (\ n=1,2,\cdots) \text{ s.t. } A - \frac{1}{n} < f(a_n) \ (\ \le A)$$

であることを示せ。

(4) (3) の $\{a_n\}$ に Borzano-Weierstrass の定理を適用して、$\{a_n\}$ が収束する部分列を含むことが分かる。それを $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\cdots}$ とし、$a_{n_k} \to \eta$ ( $k \to \infty$) とすれば、$\eta \in [a,b]$ かつ $f(x)$ が $x = \eta$ で最大値をとることを示せ。

**3-8.** $f(x)$ を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする。

(1) $f(x)$ が $[a,b]$ で一様連続でないと仮定する。このとき

$\exists \varepsilon > 0$ s.t. 「$\forall \delta > 0, \exists x, y \in [a,b]$ s.t. “$|x-y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$”」

であることに注意して、

$\exists \varepsilon > 0, \exists x_n, y_n \in [a,b]$ ( $n = 1,2,\cdots$) s.t.

$$\text{“}0 < x_n - y_n < \frac{1}{n} \text{ かつ } |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon\text{”}$$

を示せ。

(2) (1) の $\{x_n\}$ に Borzano-Weierstrass の定理を適用して収束する部分列の存在が分かる。それを $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\cdots}$ とすれば、(1) の $\{y_n\}$ に対して $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ であることを示し、矛盾を導け。

注) (1)、(2) より $f(x)$ が $[a,b]$ で一様連続であることが分かる。

**3-9.** 関数 $y = \sqrt{x}$ が区間 $(0,\infty)$ で一様連続であることを示せ。

**3-10.** 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ が $f(0) \ge 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を満たすならば、$f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ で最大値をもつことを示せ。
Hint) $f(x) \le 0$ ( $\forall x \in [0,\infty)$) のときは $f(0) = 0$ となり、これが最大値を与える。故に “$\exists a \in [0,\infty)$ s.t. $f(a) > 0$” の場合を考えればよい。

**3-11.** 有界な開区間 $(a,b)$ で定義された関数 $f(x)$ が一様連続であるとする。このとき次を示せ。

(1) $f(x)$ は区間 $(a,b)$ で有界 ( *i.e.* $\exists M > 0$ s.t. $|f(x)| < M$ ( $\forall x \in (a,b)$)) である。

(2) $a_n \in (a,b)$ ( $n = 1,2,\cdots$) かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ならば、$\{f(a_n)\}$ は収束する。
Hint) 収束列であるための必要十分条件は Cauchy 列であることである。これに注意して、$\{f(a_n)\}$ が Cauchy 列であることをいえばよい。

**広義積分**

- $-\infty < a < b < \infty$ とし、 $f(x)$ が区間 $(a,b]$ で定義されていて、任意の $c \in (a,b]$ に対して $f(x)$ が $[c,b]$ で (Riemann) 積分可能であるとする (Riemann 積分については p15 を参照)。このとき、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ が存在するならば、この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表し、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するまたは広義積分可能であるという。同様に $f(x)$ が $[a,b)$ で定義されていて、任意の $c \in [a,b)$ に対して $f(x)$ が $[a,c]$ で (Riemann) 積分可能であるとき、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ が存在するならば、この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表し、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するまたは広義積分可能であるという。$f(x)$ が $(a,b)$ で定義されていて、$(a,b)$ に含まれる任意の閉区間上 (Riemann) 積分可能であるときも、広義積分が同様に定義される。
- 積分区間が有限でない場合、例えば $f(x)$ が区間 $[a,\infty)$ で定義されていて、任意の $b\ (\geq a)$ に対して $f(x)$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能であるとする。このとき、$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ が存在するならば、この極限値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ で表し、(広義積分) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束するまたは広義積分可能であるという。

**4-1.** $-\infty < a < b < \infty$ とし、$f(x)$ は $(a,b]$ で定義されていて、任意の $c \in (a,b]$ に対して $f(x)$ が $[c,b]$ で (Riemann) 積分可能とする。このとき、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は

$(*)$ $\quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ s.t. “$a+\delta < b$ かつ $\left(a < c < d < a+\delta \Rightarrow \left|\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx\right| < \varepsilon\right)$”

であることを、次の順で示せ。

(1) $(*)$ が必要条件であることを示せ。
Hint) $|\int_c^d f(x)\,dx| = |\int_c^b f(x)\,dx - \int_d^b f(x)\,dx|$ と $\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ を用いよ。

(2) $(*)$ が成り立つと仮定する。$n_0 \in \mathbf{N}$ を $a + \dfrac{1}{n_0} \leq b$ なるようにとって

$$I_n := \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,dx \quad (\ n \geq n_0)$$

とおく。このとき数列 $\{I_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを示せ。

(3) $(*)$ が成り立つと仮定して、(2) と実数の連続性の公理より「$\exists I \in \mathbf{R}$ s.t. $\lim_{n\to\infty} I_n = I$」が分かる。$\varepsilon > 0$ とすると、「$\exists N \in \mathbf{N}$ s.t. “$n \geq N \Rightarrow |I_n - I| < \varepsilon/2$”」が成り立つ。$n \geq N$ かつ $a < c < a + \dfrac{1}{n}$ ならば

$$\left|\int_c^b f(x)\,dx - I\right| \le |I_n - I| + \left|\int_c^{a+1/n} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_c^{a+1/n} f(x)\,dx\right|$$

である。これより $(*)$ が十分条件であることを示せ (証明を完成させよ)。

**4-2.** $f(x)$ が $[a,\infty)$ で定義されていて、任意の $b$ ( $\ge a$) に対して $f(x)$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能とする。このとき、$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > a \text{ s.t. ``}c > b > M \Rightarrow \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| < \varepsilon\text{''}$$

であることを示せ。

**4-3.** $\alpha > 0$ のとき、広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ が収束するための $\alpha$ に対する条件を求めよ。また収束するとき、その値を求めよ。

**4-4.** $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx\ (\,=: \Gamma(s))$$

が収束することを示せ ( $\Gamma(s)$ をガンマ関数と呼ぶ)。

Hint) $s < 1$ のときは広義積分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ と $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ に分けて考える。$0 \le e^{-x}x^{s-1} \le x^{s-1}$ ( $x \ge 0$) と 各 $s > 0$ に対して $0 \le e^{-x}x^{s-1} \le C_s x^{-2}$ ( $x \ge 1$) を満たす $C_s > 0$ が存在することを用いる。

**4-5.** $p > 0$、$q > 0$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ (\,=: B(p,q))$$

が収束することを示せ ( $B(p,q)$ をベーター関数と呼ぶ)。

Hint) $0 < p < 1$、$0 < q < 1$ のときは広義積分 $\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ と $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ に分けて考える。

**4-6.** 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示せ。

Hint) $|\sin x/x| \le 1$ ( $x > 0$) 及び

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

を用いよ。

**Riemann 積分**

$-\infty < a \leq b < \infty$、$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で有界 ( *i.e.*, $\exists M \geq 0$ s.t. $|f(x)| \leq M$ ( $\forall x \in [a,b]$)) とする。

- $[a,b]$ の分割 $\Delta$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ に対して、

$$\overline{\Sigma}_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{N} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)\ (x_i - x_{i-1})$$
$$\underline{\Sigma}_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{N} \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)\ (x_i - x_{i-1})$$
$$|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1})$$

と定義する。$-M(b-a) \leq \underline{\Sigma}_\Delta(f) \leq \overline{\Sigma}_\Delta(f) \leq M(b-a)$ より

$\overline{S}(f) := \inf_{\Delta} \overline{\Sigma}_\Delta(f)$ (すべての $[a,b]$ の分割についての下限): $f$ の上積分

$\underline{S}(f) := \sup_{\Delta} \underline{\Sigma}_\Delta(f)$ : $f$ の下積分

が定義される。そのとき $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ が成り立つ。

- $f$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$

このときこの値 ( $= \overline{S}(f)$) を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。

- $[a,b]$ の分割 $\Delta$ に対して、

$V_\Delta(f) := \overline{\Sigma}_\Delta(f) - \underline{\Sigma}_\Delta(f)$ : 変動和

とおく。このとき $0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq V_\Delta(f)$ より

$\inf_{\Delta} V_\Delta(f) = 0 \Longrightarrow f$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能

が成り立つ。以下の Darboux の定理を用いて、上の逆も成り立つことが分かる。

- $f$ が $[a,b]$ で連続ならば、$f$ は $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能 (問題 7 参)。

- (Darboux の定理) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. "($\Delta$ は $[a,b]$ の分割 かつ $|\Delta| < \delta$) $\Rightarrow$ ($|\overline{S}(f) - \overline{\Sigma}_\Delta(f)| < \varepsilon$ かつ $|\underline{S}(f) - \underline{\Sigma}_\Delta(f)| < \varepsilon$)"

- 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $[a,b]$ の分割 $\Delta_n$: $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{N(n)}^{(n)} = b$ が与えられていて $|\Delta_n| \to 0$ ( $n \to \infty$) を満たしているとする。各 $\Delta_n$ に対して $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ ( $i = 1, 2, \cdots, N(n)$) が定められているとする。このとき $f$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能ならば、

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N(n)} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

が成り立つ。逆に $\{\xi_i^{(n)}\}$ の取り方によらず $(*)$ の右辺が一定の極限値をもつならば、$f$ は $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能である。

**4-7.** $f(x)$ は $[a,b]$ で有界であるとする。$[a,b]$ の分割 $\Delta_1$、$\Delta_2$ に対して、$\underline{\Sigma}_{\Delta_1}(f) \leq \overline{\Sigma}_{\Delta_2}(f)$ が成り立つことを示せ(これより $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ が分かる)。

**4-8.** $f(x)$ は $[a,b]$ で連続であるとする。$f$ が $[a,b]$ で一様連続であることを用いて(P10 参照)、$f$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能であることを示せ。

**4-9.** Darboux の定理を証明せよ。

**4-10.** 「$f$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能 $\Longleftrightarrow \inf\limits_{\Delta} V_\Delta(f) = 0$」を示せ。

**4-11.** $f(x)$、$g(x)$ が $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能であるとする。次を示せ。

(1) $f(x) + g(x)$ も $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能で
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) $A \in \mathbf{R}$ に対して $Af(x)$ も $[a,b]$ で (Riemann) 積分可能で
$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

(3) $a \leq c \leq d \leq b$ とする。このとき $f(x)$ は $[c,d]$ で (Riemann) 積分可能で、特に
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(4) $f(x) \geq g(x)$ ( $\forall x \in [a,b]$) ならば
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

**4-12.** $f$ が $[a,b]$ で有界かつ単調増加(または単調減少)ならば、(Riemann) 積分可能であることを示せ。
Hint) $f$ が定数値関数でない単調増加関数のとき、$\alpha := f(a) < \beta := f(b)$ とおく。$N \in \mathbf{N}$ に対して $x_i^{(N)} := f^{-1}(\alpha + i(\beta - \alpha)/N)$ ( $i = 0, 1, \cdots, N$) とおく。このとき分割 $\Delta_N$: $a = x_0^{(N)} < x_1^{(N)} < \cdots < x_N^{(N)} = b$ に対して、変動和 $V_\Delta(f) = (\beta - \alpha)(b - a)/N$ である。

**4-13.** $a \leq b \leq c$ として、$f$ が $[a,b]$ 及び $[b,c]$ で (Riemann) 積分可能ならば $f$ は $[a,c]$ で (Riemann) 積分可能であることを示せ。

**4-14.** 区間 $[0,1]$ 上で
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}) \\ 0 & (\ x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$
によって定義される関数 $f(x)$ (Dirichlet(ディリクレ)の関数と呼ばれる)は、(Riemann) 積分可能でないことを示せ。ここで $A \setminus B := \{x \in A |\ x \notin B\}$ である。