ボーヤイ・ゲルビンの定理

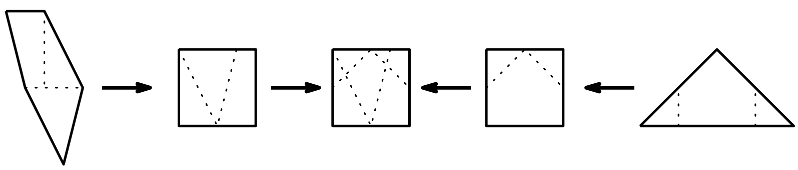
筑波大学数理物質科学研究科
若林誠一郎

1.　ボーヤイ・ゲルビン(Bolyai-Gerwien) の定理

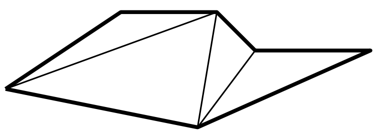
折れ線で囲まれた平面図形を多角形という.

定理: 2つの多角形 A, B が与えられたとする.
A を有限個の小多角形に分けてそれらを寄せ集めて B になる
$\Longleftrightarrow$ (必要十分条件)
A と B の面積が等しい

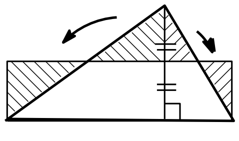
証明: ($\Rightarrow$) 明らか.
($\Leftarrow$) 多角形を小多角形に分けて, それを寄せ合わせて同じ面積をもつ正方形ができることをいえばよい ($\because$ 多角形と多角形の共通部分は有限個の多角形の和集合 $\leftarrow$ このことは多角形を三角形に分割し, 三角形と三角形の共通部分が多角形であることより分かる).



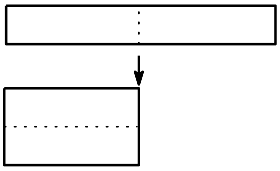
(i) 多角形を三角形に分割する (面積の和は変わらない. はさみと定規を使う).



(ii) 各三角形を小多角形に分けて 寄せ合わせて, 1つの三角形から面積の等しい1つの長方形を作る. 例えば, 三角形の一番長い辺を底辺にして, 底辺にない頂点から底辺に垂線を下ろす。その垂線の垂直2等分線を引く. 図のようにして三角形から長方形を作れる (はさみとコンパスと定規を用いて実際にやってみよう).



(iii) 得られた各長方形の１辺の長さが他の辺の長さの４倍以内であるようにする.



(必要なら有限回繰り返す)

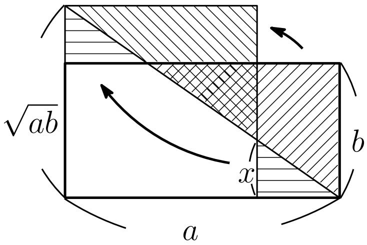
(iv) (iii) で得られた長方形を小多角形に分けて寄せ集めて１つの長方形から１つの正方形を作る.

$a \geq b, \quad a \leq 4b$

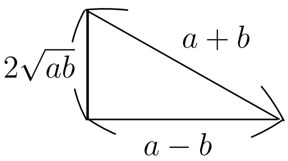
$x : (a - \sqrt{ab}) = \sqrt{ab} : a$ より

$x = \sqrt{ab} - b$

$x \leq b \Leftrightarrow a \leq 4b$



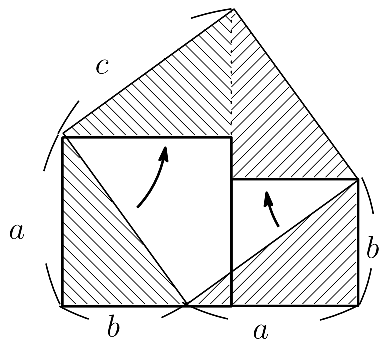
ピタゴラスの定理を用いて, 下図のように $\sqrt{ab}$ の長さの辺を作図し, 上図のようにして長方形から面積の等しい正方形を作る.



(v) 次に有限個の正方形を小多角形に分けて寄せ合わせて, １つの正方形を作る. このためには２個の正方形を１つの正方形にできることをいえばよい.

$a \geq b, \quad c^2 = a^2 + b^2$

(ピタゴラスの定理の証明にもなっている)



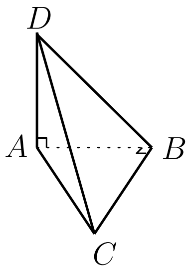
2.　ヒルベルトの第３問題

「多角形」を「多面体」,「面積」を「体積」に読み替えて定理は成り立つか？ここで多面体とは, いくつかの多角形で囲われた立体のことである.

ヒルベルト (Hilbert) の第３問題:

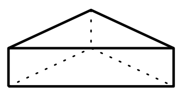
底面積と高さの等しい４面体 (三角錐)(したがって体積も等しい) の一方を有限個の小多面体に分けて, それらを寄せ合わせて他方の四面体を作ることは一般に不可能であることを示せ.
(1900 年パリ国際数学者会議でヒルベルトが２３の「数学の問題」をリストアップして２０世紀の数学の目標を与えた)
← ヒルベルトの第３問題は 1900 年にデン (Dehn) によって解決された ([Bo] 参照). すなわちデンは「正四面体を小多面体に分けてそれらを寄せ集めて立方体を作ることはできない」ことを示した. 特別な四面体である以下に与えるヒル (Hill) の四面体から立方体を作ることができる. したがって, ヒルベルトの第３問題が解決されたことになる.

ヒルの四面体:

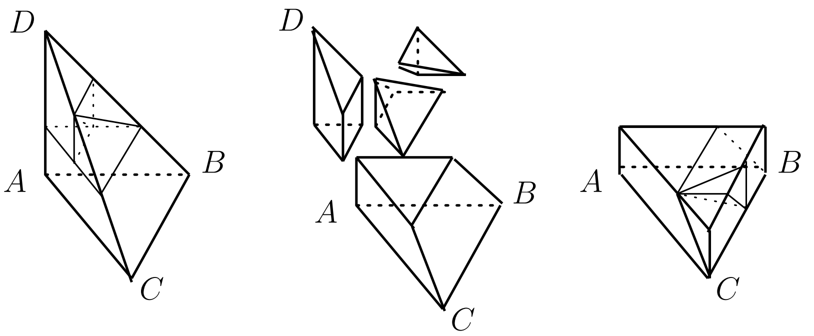


$AB = BC = AD$

$\angle BAD$
$= \angle ABC$
$= \angle CAD$
$= 90^\circ$

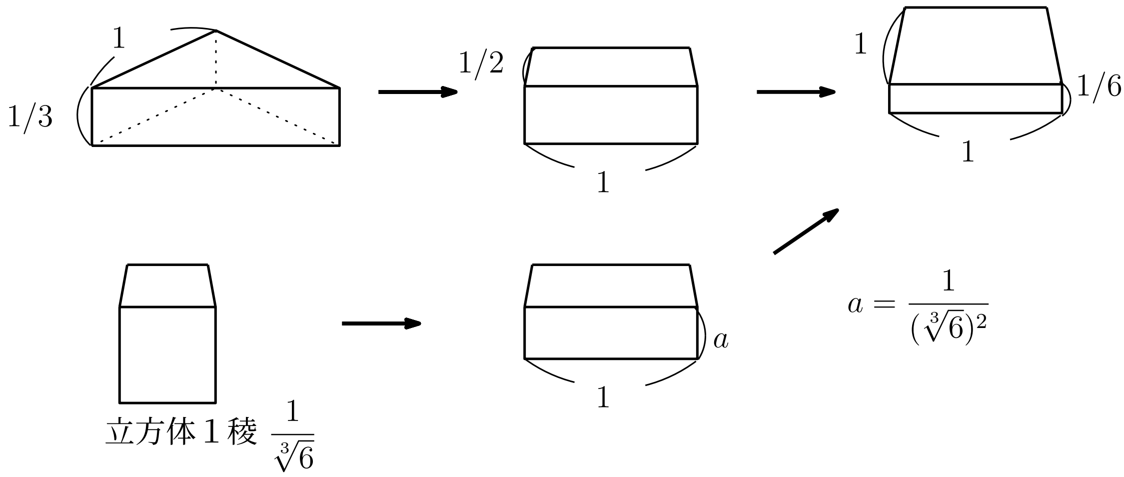


上の四面体はヒルの四面体と呼ばれ, 右の立体はヒルの四面体と同じ底面と同じ体積をもつ三角柱である.



上図のように ヒルの四面体を４つの立体に分割して、それらをつなぎ合わせて上図右の三角柱を作ることが出来る. さらに三角柱を有限個の小多面体に分けてそれらをつなぎ合わせて, 同じ体積の立方体を作ることができる. 実際例えば稜 (辺) AB の長さを 1 とすれば, 体積は $\dfrac{1}{6}$ となり, ボーヤイ・ゲルビンの定理の証明中の方法を適用して, 上の三角柱から各稜の長さが 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ である直方体を作れる. さらに各稜の長さが 1, 1, $\dfrac{1}{6}$ であ

る直方体を作れる．一方体積 $\dfrac{1}{6}$ の立方体から同様にして，各稜の長さが $1, \dfrac{1}{(\sqrt[3]{6})^2}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$ である直方体を作れる．さらに各稜の長さが $1, 1, \dfrac{1}{6}$ である直方体を作れる．以上より ヒルの四面体を小多面体に分けてこれらをつなぎ合わせて，同じ体積の立方体を作れることが分かる (下図参照)．ここで，$\sqrt[3]{6}$ は３乗して 6 になる正の数を表す．



・ボーヤイ・ゲルビンの定理については，

[W] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge Univ. Press, 1985.

を参考にした．

・[Bo] Vladimir G. Boltianskii, Hibert's Third Problem, trans. by R. Silverman, Winston, 1978.

★下の図形はそれぞれヒルの四面体を４つの立体に分割して得られた立体の展開図である. これらから立体を作ってつなぎ合わせて, ヒルの四面体と三角柱を作ってみよう！