部分積分簡易計算法

部分積分を繰り返し用いて不定積分を求めるイメージ

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)g'(x)\,dx \\
&= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= f(x)g(x) - \left(\bigcirc\bigcirc - \int \triangle\triangle\,dx \right) \\
&= \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

今回の試みはこの計算を 1 行で済まそうというものです。

$\boxed{\text{準備}}$

$A,\ B$ を x の関数として $\displaystyle\int AB\,dx$ を求めるとき

次のような表を作成する。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & & B & \\
\text{微分する} & A_1 & & B_1 & \text{積分する} \\
\downarrow & A_2 & & B_2 & \downarrow \\
 & A_3 & & B_3 & \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

ここで部分積分のイメージを次のようにもちます。

$$\int AB\,dx = AB_1 - \int A_1B_1\,dx$$

$$\int \begin{array}{c} \boxed{A \qquad B} \\ A_1 \qquad B_1 \end{array} dx = \begin{array}{cc} A & B \\ A_1 & B_1 \end{array} - \int \begin{array}{c} A \qquad B \\ \boxed{A_1 \qquad B_1} \end{array} dx$$

具体例で示してみます。

$$\int x \sin x \, dx \quad \text{については}$$

$$\begin{array}{ll} x & \sin x \\ 1 & -\cos x \end{array} \quad \text{を準備して}$$

$$\int x \sin x \, dx = x\left(-\cos x\right) - \int 1 \left(-\cos x\right) dx$$

とします。お楽しみはこれから

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\, dx$$

右辺の２項目の積分は

$$\begin{array}{cc} x & \sin x \\ \boxed{1 \quad -\cos x} & \\ 0 & -\sin x \end{array}$$

の積分ですから、連続して

$$\begin{array}{cc} x & \sin x \\ 1 & -\cos x \\ \boxed{0 \quad -\sin x} & \end{array}$$

$$= x(-\cos x) - \left(1(-\sin x) - \int 0 \, dx\right)$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

要するに

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & \\ \text{微分する} & A_1 & B_1 & \text{積分する} \\ \downarrow & A_2 & B_2 & \downarrow \\ & A_3 & B_3 & \\ & \vdots & \vdots & \end{array}$$

と準備したとき $A_i = 0$ となることがあれば

その部分積分は簡単で

$$
\begin{array}{cc}
A & B \\
A_1 & B_1 \\
A_2 & B_2 \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
A_{i-1} & B_{i-1} \\
0 & B_i
\end{array}
$$

これをイメージすることで

$$
\begin{aligned}
\int AB\,dx = AB_1 - A_1B2 + A_2B_3 - \cdots \\
\cdots + (-1)^{i-1}A_{i-1}B_i + C
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{練習}}$

$\int x^2 \sin x \, dx$ について

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

(与式) $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$