1 座標平面の原点を O とする。座標平面上の直線 $y=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ を ℓ_1 とし，直線 $y=\sqrt{3}x$ を ℓ_2 とする。また，ℓ_1 と x 軸の交点を A とし，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 A と点 B の座標を求めよ。

(2) △OAB の重心の座標を求めよ。

(3) △OAB の内接円の中心の座標と半径を求めよ。

(1) ℓ_1 について $y=0$ とすると，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

したがって A の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ 0\right)$

B の x 座標について $-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}x$ を解き

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{8-3}=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}$$

y 座標は ℓ_2 上であることを用いて，

B の座標は $\left(\dfrac{2\sqrt{6}-3}{5},\ \dfrac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}\right)$

(2) 重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

$$=\left(\frac{13\sqrt{6}-12}{60},\ \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\right)$$

したがって重心の座標は $\left(\dfrac{13\sqrt{6}-12}{60},\ \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\right)$

(3) ∠AOB の二等分線の方程式は

直線 OA ： $y=0$，直線 OB ： $\sqrt{3}x-y=0$ として，角の二等分線上の点 (x, y) から OA，OB までの距離は等しくなるので

$$\frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}$$

$$2|y|=\left|\sqrt{3}x-y\right|$$

$$2y=\pm\left(\sqrt{3}x-y\right)$$

内角の二等分線として $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\ \cdots ①$ とする。

∠OAB の二等分線の方程式は

直線 AB ： $2\sqrt{2}x+y-\sqrt{3}=0$ とし

$$\frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{\left|2\sqrt{2}x+y-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}}$$

$$3|y|=\left|2\sqrt{2}x+y-\sqrt{3}\right|$$

$$3y=\pm\left(2\sqrt{2}x+y-\sqrt{3}\right)$$

内角の二等分線として $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\cdots$② とする。
①，② の交点が求める内接円の中心となるので，①，② を解き
$(x\,,\,y)=\left(\dfrac{3\sqrt{6}-6}{4}\,,\,\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)$
求める内接円の中心の座標は
$\left(\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{6}-6}{4}\,,\,\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}}\right)$，半径は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}}$

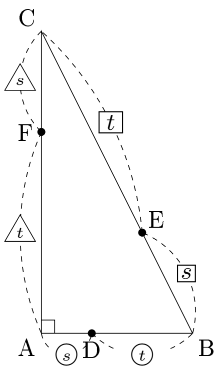
2 $\angle$A が直角である直角三角形 ABC がある。$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2$ である。正の数 s，t に対して，線分 AB，BC，CA を $s:t$ の比に内分する点をそれぞれ D，E，F とする。$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおいたとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ および s，t を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が垂直となるような $\frac{s}{t}$ の値をすべて求めよ。

(3) $8s \leqq 9t$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は垂直にならないことを示せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{s}{s+t}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{t\vec{b}+s\vec{c}}{s+t}$，
$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{t}{s+t}\vec{c}$ を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\frac{(t-s)\vec{b}+s\vec{c}}{s+t}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\frac{-t\vec{b}+(t-s)\vec{c}}{s+t}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \neq \vec{0}$ から
$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}} = 0$ となるときを考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \frac{1}{(s+t)^2}\left((t-s)\vec{b}+s\vec{c}\right)\cdot\left(-t\vec{b}+(t-s)\vec{c}\right)$$

$\left|\vec{b}\right|^2 = 1$，$\left|\vec{c}\right|^2 = 4$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ $\cdots$① から
$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}} = 0$ となるのは

$$-t(t-s)+4s(t-s) = 0$$

$$(-t+4s)(t-s) = 0 \quad \text{したがって } t = 4s,\ s$$

$t \neq 0$ から $\frac{s}{t} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$，$\boldsymbol{1}$

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}} &= (\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})\\ &= \frac{1}{(s+t)^2}\left(s\vec{b}-(s+t)\vec{c}\right)\cdot\left(-t\vec{b}+(t-s)\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{(s+t)^2}\left(-st-4(s+t)(t-s)\right) \quad (\because ①)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(s+t)^2}(4s^2 - st - 4t^2)$$

$$= \frac{t^2}{(s+t)^2}\left(4\left(\frac{s}{t}\right)^2 - \frac{s}{t} - 4\right) \quad (\because t \neq 0)$$

ここで $\dfrac{t^2}{(s+t)^2} > 0$ であるから

第 2 項の $4\left(\dfrac{s}{t}\right)^2 - \dfrac{s}{t} - 4$ の符号を考える。

$u = \dfrac{s}{t}$ とおき，$f(u) = 4u^2 - u - 4$ について

条件 $8s \leqq 9t$ のとき

$t > 0$ から $\dfrac{s}{t} \leqq \dfrac{9}{8}$ すなわち $0 < u \leqq \dfrac{9}{8}$ $\cdots$② となる。

$f'(u) = 4u - 1$ から ② の範囲での増減表は

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{9}{8}$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	-4	↘	極小	↗	$-\frac{1}{16}$

① の範囲では $f(u) < 0$ が示されたので $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} < 0$ も示された。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が垂直になることはない。

3 座標平面の原点を O とし，3 点 A $(-2, 0)$，B $(\cos\theta, \sin\theta)$，C $(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) AB^2 と BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ のとき，$AB^2 + BC^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの点 B の座標を求めよ。

(1)
$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (\cos\theta + 2)^2 + \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta + 4\cos\theta + 4 + \sin^2\theta \\
&= \mathbf{4\cos\theta + 5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= (3\cos 3\theta - \cos\theta)^2 + (3\sin 3\theta - \sin\theta)^2 \\
&= 9\cos^2 3\theta - 6\cos 3\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\
&\qquad + 9\sin^2 3\theta - 6\sin 3\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\
&= 9 - 6(\cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta) + 1 \\
&= 10 - 6\cos(3\theta - \theta) \\
&= 10 - 6\cos 2\theta \\
&= 10 - 6(2\cos^2\theta - 1) \\
&= \mathbf{-12\cos^2\theta + 16}
\end{aligned}
$$

(2) $AB^2 + BC^2 = L$，$\cos\theta = t$ とする。

$0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ のとき $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \cdots$ ① であり

$$
\begin{aligned}
L &= 4\cos\theta + 5 - 12\cos^2\theta + 16 \\
&= -12t^2 + 4t + 21 \\
&= -12\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

① の範囲で考えて，L は

$t = \frac{1}{6}$ すなわち $\cos\theta = \frac{1}{6}$，$\sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$ のとき最大値，

$t = 1$ すなわち $\theta = 0$ のとき最小となることがわかる。

最大値 $\mathbf{\frac{64}{3}}$ **, B** $\mathbf{\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)}$

最小値 $\mathbf{13}$ **, B** $\mathbf{(1, 0)}$

4 正の数 a，b に対して，$S=\left\{\int_0^a(2x+b)\,dx\right\}^2$，$T=\int_0^a(2x+b)^2\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) S，T を a，b を用いて表せ。

(2) $b=a$ で $0<a\leqq 1$ のとき，$\dfrac{T-S}{a}$ の最大値を求めよ。

(3) $0<a\leqq 1$ のとき，$S<T$ が成り立つことを示せ。

(1)

$$\int_0^a(2x+b)\,dx=\Big[x^2+bx\Big]_0^a$$
$$=a^2+ab \quad \text{から}$$

$$S=(a^2+ab)^2=\boldsymbol{a^4+2a^3b+a^2b^2}$$

$$T=\int_0^a(4x^2+4bx+b^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3+2bx^2+b^2x\right]_0^a$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3+2a^2b+ab^2}$$

(2) $b=a$ のとき $S=4a^4$，$T=\dfrac{13}{3}a^3$ であり，$\dfrac{T-S}{a}=f(a)$ とすると

$$f(a)=\frac{\frac{13}{3}a^3-4a^4}{a}=-4a^3+\frac{13}{3}a^2$$
$$f'(a)=-12a^2+\frac{26}{3}a$$
$$=-\frac{2}{3}a\,(18a-13)$$

$0<a\leqq 1$ の範囲で増減表は

a	0	$\cdots$	$\frac{13}{18}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

最大値は

$$f\left(\frac{13}{18}\right)=-4\cdot\left(\frac{13}{18}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{13}{18}\right)^2=\boldsymbol{\frac{2197}{2916}}$$

(3) b を定数とし $T-S=h(a)$ とする。

$$h(a)=-a^4+\left(-2b+\frac{4}{3}\right)a^3+(2b-b^2)\,a^2+b^2a$$
$$h'(a)=-4a^3+3\left(-2b+\frac{4}{3}\right)a^2+2\,(2b-b^2)\,a+b^2$$
$$=-4a^3+(-6b+4)\,a^2+(-2b^2+4b)\,a+b^2$$

$h'\left(-\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{1}{2}b^3-\dfrac{3}{2}b^3+b^2+b^3-2b^2+b^2=0$ から

$$h'(a)=(2a+b)(-2a^2+(-2b+2)\,a+b)$$ と因数分解でき

$g(a)=-2a^2+(-2b+2)\,a+b$ とすると $2a+b>0$ から

$h'(a)$ の符号は，$g(a)$ の符号と一致する。

2 次式 $g(a)$ について，$g(0)=b>0$ から，方程式 $g(a)=0$ は正の解と負の解をそれぞれ 1 つずつもつことがわかる。

正の解を β とし，$0<a\leqq 1$ の範囲で $h(a)$ の増減表を考える。

$h(1)=\left(\dfrac{4}{3}+2a+b^2\right)-(1+2b+b^2)=\dfrac{1}{3}$ に注意して

- $0<\beta\leqq 1$ のとき

a	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$

- $1<\beta$ のとき

a	0	$\cdots$	1
$h'(a)$		$+$	
$h(a)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}$

いずれの場合も $0<a\leqq 1$ では $h(a)>0$ が成り立つ。

すなわち $S-T$ が成り立つ。

【別解 1】（試しにやってみる）

(1) から

$$\begin{aligned}
T-S&=\left(\frac{4}{3}a^3+2a^2b+ab^2\right)-(a^4+2a^3b+a^2b^2)\\
&=\left(\frac{1}{3}a^3+a^3+2a^2b+ab^2\right)-(a^4+2a^3b+a^2b^2)\\
&=\left(\frac{1}{3}a^3+a(a+b)^2\right)-a^2(a+b)^2\\
&=\frac{1}{3}a^3+(a-a^2)\,(a+b)^2\\
&=\frac{1}{3}a^3+a\,(1-a)\,(a+b)^2\\
&>0\quad(\because\ 0<a<1)
\end{aligned}$$

したがって $S<T$ が示された。

【別解 2】（シュワルツの不等式）

積分区間，被積分関数の関係から $S>0$，$T>0$ である。

ここで $(ax+b+t)^2$ は，任意の t について非負であり，区間 $0\leqq x\leqq a$ で積分した値は正となる。すなわち

$$\int_0^a (t+2x+b)^2\,dx>0$$

$$(\text{左辺})=t^2\int_0^a dx+2t\int_0^a (2x+b)\,dx+\int_0^a (2x+b)^2\,dx$$

$$= at^2 + 2t\int_0^a (2x+b)\,dx + \int_0^a (2x+b)^2\,dx$$

これが $0 < a \leqq 1$ のとき，任意の t について成り立つので

$$\left\{\int_0^a (2x+b)\,dx\right\}^2 - a\int_0^a (2x+b)^2\,dx < 0$$

したがって $S - aT < 0$ となる。

　そして $T > 0$，$0 < a \leqq 1$ から $S < T$ が得られる。