1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ を満たす正の整数の組 (m, n) を求めよ。

公式を用いて

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{m}(nk-2k^2)\\ &= n\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\\ &= \frac{1}{6}m(m+1)\{3n-2(2m+1)\}\end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = 2^3\times 11\times 23$$

両辺に 6 をかけて

$$m(m+1)\{3n-2(2m+1)\}=2^4\times 3\times 11\times 23 \cdots ①$$

として考える。

◀ 素因数分解して，必要条件を求める。

左辺の項 $\{3n-2(2m+1)\}$ は整数であるから，$m(m+1)$ は左辺の因数分解の結果を用いて

$$\begin{aligned}&(m, m+1)\\ &=(1, 2), (2, 3), (3, 4), (11, 12), (22, 23), (23, 24)\end{aligned}$$

◀ m 単独でなく，m と $m+1$ のペアであると絞りやすい

の 6 通りに限られる。

◀ 整数問題お決まりの，必要条件で絞り，総当たりで確認

- $(m, m+1)=(1, 2)$ のとき ① は

$$3n-6=2^3\times 3\times 11\times 23=6072$$

$(m, n)=(1, 2026)$

- $(m, m+1)=(2, 3)$ のとき ① は

$$3n-10=2^3\times 11\times 23=2024$$

$(m, n)=(2, 678)$

- $(m, m+1)=(3, 4)$ のとき ① は

$$3n-14=2^2\times 11\times 23=1012$$

$(m, n)=(3, 342)$

- $(m, m+1)=(11, 12)$ のとき ① は

$$3n-46=2^2\times 23=92$$

$(m, n)=(11, 46)$

- $(m, m+1)=(22, 23)$ のとき ① は

$$3n-90=2^3\times 3=24$$

$(m, n)=(22, 38)$

- $(m, m+1)=(23, 24)$ のとき ① は

$$3n-94=2^1\times 11=22$$

これを満たす自然数 n は存在しない。

以上から求める解の組は

(m, n)
$= (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38)$

〔参考〕m および $m+1$ のとり得る値。

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	1	2	4	8	16
3	3	6	12	24	48
11	11	22	44	88	176
23	23	46	92	184	368
3×11	33	66	132	264	528
3×23	69	138	276	552	1104
11×23	253	506	1012	2024	4048
$3 \times 11 \times 23$	759	1518	3036	6072	12144

2 a，b を実数とする。曲線 C ： $y = x^2$ と曲線 C' ： $y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

$f(x) = x^2$，$g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。
$f'(x) = 2x$，$g'(x) = -2x + a$ である。
C と C' の交点の x 座標を t とすると

$$f(t) = g(t)$$

$$t^2 = -t^2 + at + b$$

$$2t^2 - at - b = 0 \cdots ①$$

C と C' は 2 点で交わるので，（① の判別式）> 0 となり

◀ 2 つの放物線が 2 交点をもつ条件

$$a^2 + 8b > 0 \cdots ②$$

次に $x = t$ における接線が直交するのは $f'(t) \times g'(t) = -1$ から

◀ 2 直線の直交条件

$$2t\,(-2t + a) = -1$$

$$4t^2 - 2at - 1 = 0 \cdots ③$$

① $\times 2 -$ ③ から $-2b + 1 = 0$ より $b = \dfrac{1}{2}$

このとき，条件 ② は任意の実数 a について成り立つ。C と C' の交点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，① である

$$2t^2 - at - \frac{1}{2} = 0$$

$$4t^2 - 2at - 1 = 0$$ を解の公式を用いて解き

$\alpha = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{4}$，$\beta = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{4}$ とする。

このとき $\beta - \alpha = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4}}{2} \cdots ④$ であり，C と C' で囲まれる部分の面積を S とすると，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ では $f(x) \leqq g(x)$ より，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx \\ &= -2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2}\right)^3 \quad (\because ④) \end{aligned}$$

◀ 被積分関数を工夫する

S が最小となるのは $a^2 + 4$ が最小，すなわち $a = 0$ のときであり，このとき $\boldsymbol{S = \dfrac{1}{3}}$

3 $f(x)$ は x に関する 4 次多項式で，4 次の係数は 1 である。$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余る。$f(x)$ を求めよ。

定数 a，b および x^2 の係数が 1 である 2 次式 $q(x)$ を用いて 2 つの条件は

$$f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)+1 \cdots ①$$

$$f(x)=(x-1)^2q(x)+2 \cdots ②$$

したがって

$$(x+1)^2(x^2+ax+b)+1=(x-1)^2q(x)+2 \cdots ③$$

となり，これは x についての恒等式となる。

◀ 因数定理：多項式 $f(x)$ が 1 次式 $x-a$ で割り切れるとき $f(a)=0$

その拡張：多項式 $f(x)$ が 2 次式 $(x-a)^2$ で割り切れるとき $f(a)=0$ かつ $f'(a)=0$

③ の両辺に $x=1$ を代入する。

$$2^2(1+a+b)+1=2$$

$$4a+4b+3=0 \cdots ④$$

③ の両辺を x で微分して得られる等式

$$2(x+1)(x^2+ax+b)+(x+1)^2(2x+a)$$
$$=2(x-1)q(x)+(x-1)^2q'(x) \cdots ⑤$$

◀ 積の微分公式（現行課程では数学Ⅲ）u，v を関数とするとき $(uv)'=u'v+uv'$

⑤ の両辺に $x=1$ を代入する。

$$4(1+a+b)+4(2+a)=0$$

$$(1+a+b)+(2+a)=0$$

$$2a+b+3=0 \cdots ⑥$$

④，⑥ を解いて $(a,b)=\left(-\dfrac{9}{4},\dfrac{3}{2}\right)$

逆にこのとき条件を満たすことが確認されるので

$$f(x)=(x+1)^2\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{3}{2}\right)+1$$

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}}$$

〔別解 1〕 微分を用いない解答

$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余る等から定数 a，b を用いて

$$f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)+1 \cdots ①$$ とできる。

◀ 未知数を 2 つ用いて条件から，方程式を 2 本作る。(通常の剰余の定理の問題とは異なり，いきなり 2 本作成できない)

$g(x)=f(x)-2$ とすると

$$g(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)-1 \cdots ②$$

$g(x)$ は $(x-1)^2$ で割りきれるので $g(1)=0$ から

$$4(1+a+b)-1=0$$

$$1+a+b=\frac{1}{4} \quad \text{すなわち } b=-a-\frac{3}{4} \cdots ③$$

③ を用いると

$$x^2+ax+b=x^2+ax--a-\frac{3}{4}$$
$$=x^2-1+\frac{1}{4}+a\,(x-1)$$
$$=(x+1)(x-1)+a\,(x-1)+\frac{1}{4}$$
$$=(x-1)(x+1+a)+\frac{1}{4}\ \cdots ④$$

④ を ② に代入すると

$$g(x)=(x+1)^2\left\{(x-1)(x+1+a)+\frac{1}{4}\right\}-1$$
$$=(x+1)^2\,(x-1)(x+1+a)+\frac{1}{4}(x+1)^2-1$$
$$=(x+1)^2\,(x-1)(x+1+a)+\frac{1}{4}\left\{(x+1)^2-4\right\}$$
$$=(x+1)^2\,(x-1)(x+1+a)+\frac{1}{4}\,(x+3)(x-1)$$

両辺を $x-1$ で割り $\dfrac{g(x)}{x-1}=h(x)$ とすると

$$h(x)=(x+1)^2\,(x+1+a)+\frac{1}{4}\,(x+3)\ \cdots ⑤$$

$h(x)$ はさらに $x-1$ で割りきれるので $h(1)=0$ から ⑤ より

$4\,(2+a)+1=0$　すなわち $a=-\dfrac{9}{4}$

③ から $b=-\left(-\dfrac{9}{4}\right)-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ を ① に代入し

$$f(x)=(x+1)^2\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{3}{2}\right)+1$$

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}}$$

〔別解 2〕　微分を用いない解答(少し工夫する)定数 c, d を用いて

◀ 別解 1 を参考にして，割り算しやすくしておく

$$f(x)=(x+1)^2\left\{(x-1)^2+c\,(x-1)+d\right\}+1\ \cdots ①$$ とする

$g(x)=f(x)-2$ とすると $g(x)$ は $(x-1)^2$ で割りきれるので

$$g(x)=(x+1)^2\left\{(x-1)^2+c\,(x-1)+d\right\}-1\ \cdots ②$$

$g(1)=0$ から $4d-1=0$ より $d=\dfrac{1}{4}\ \cdots ③$

③ を ② に代入し

$$g(x)=(x+1)^2\left\{(x-1)^2+c\,(x-1)+\frac{1}{4}\right\}-1$$
$$=(x+1)^2(x-1)^2+c(x+1)^2\,(x-1)+\frac{1}{4}(x+1)^2-1$$
$$=(x+1)^2(x-1)^2+c(x+1)^2\,(x-1)+\frac{1}{4}\,(x^2+2x-3)$$
$$=(x+1)^2(x-1)^2+c(x+1)^2\,(x-1)+\frac{1}{4}\,(x+3)(x-1)$$

両辺を $x-1$ で割り $h(x)=\dfrac{g(x)}{x-1}$ とする。

$$h(x)=(x+1)^2\,(x-1)+c(x+1)^2+\frac{1}{4}\,(x+3)\ \cdots ④$$

$h(x)$ は $x-1$ で割りきれるので $h(1)=0$ から ④ より

$$4c+1=0 \qquad \text{すなわち } c=-\frac{1}{4} \cdots ⑤$$

③，⑤ から

$$\begin{aligned}(x-1)^2+c(x-1)+d &= (x-1)^2-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{4} \\ &= x^2-\frac{9}{4}x+\frac{3}{2} \cdots ⑥\end{aligned}$$

⑥ を ① に代入し

$$f(x)=(x+1)^2\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{3}{2}\right)+1$$

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 a，b は $-1 < a < 1$，$-1 < b < 1$ を満たす。座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}\,(a,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{B}\,(-1,\ b,\ -1)$，$\mathrm{C}\,(-a,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{D}\,(1,\ -b,\ 1)$ をとる。

(1) A，B，C，D がひし形の頂点頂点となるとき，a と b の関係を表す等式を求めよ。

(2) a，b が (1) の等式を満たすとき，A，B，C，D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。

(1) 四角形が，ひし形である条件を

「2 本の対角線が互いの中点で直交する」として考える。

- A，B，C，D の順で四辺形をなすとき

  対角線 AC の中点は $(0,\ 0,\ 0)$, BD の中点は $(0,\ 0,\ 0)$ で一致する。さらに $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2a,\ 2,\ 2) \fallingdotseq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (2,\ -2b,\ 2) \fallingdotseq \vec{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となるのは $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$ から

  $$(-a,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -b,\ 1) = 0$$

  $$-a - b + 1 = 0 \quad \text{すなわち}\ a + b = 1 \cdots ①$$

- A，C，B，D の順で四辺形をなすとき

  対角線 AB の中点は $\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{-1+b}{2},\ -1\right)$，CD の中点は $\left(\dfrac{-a+1}{2},\ \dfrac{1-b}{2},\ 1\right)$ で一致することはない。

- A，C，D，B の順で四辺形をなすとき

  対角線 AD の中点は $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{-1-b}{2},\ 0\right)$，CB の中点は $\left(\dfrac{-a-1}{2},\ \dfrac{1+b}{2},\ 0\right)$ で一致する条件は

  $$\frac{a+1}{2} = \frac{-a-1}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{-1-b}{2} = \frac{1+b}{2}$$

  であるが，$-1 < a < 1$，$-1 < b < 1$ から解なし。

以上から，求める等式は $\boldsymbol{a + b = 1}$

◀ 四辺形の作り方は 3 通りあるので，調べてみる。
「調べない」と「調べたがなかった」は結果は同じでも，考え方に大いに差がある。

(2) ひし形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2+1+1}\cdot 2\sqrt{1+b^2+1}$$

$$S^2 = 4\,(a^2+2)(b^2+2)$$

◀ 対角線の長さによるひし形の面積

(1) のとき，$b = 1 - a$ から $-1 < 1 - a < 1$ となり $0 < a < 2$

$-1 < a < 1$ とあわせて $0 < a < 1 \cdots ②$ となる。

$f(a) = (a^2+2)(b^2+2) = (a^2+2)\left((1-a)^2+2\right)$ とおき

$$f(a) = (a^2+2)(a^2-2a+3)$$

$$= a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 6$$

$$f'(a) = 4a^3 - 6a^2 + 10a - 4$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{8}-\frac{6}{4}+5-4=0$ から

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & 4 & -6 & 10 & -4 \\
 & & 2 & -2 & 4 \\
\hline
 & 4 & -4 & 8 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= (2a-1)(2a^2-2a+4) \\ &= (2a-1)\left\{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\right\} \end{aligned}$$

② の範囲で増減表は

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(a)$ は $a=\frac{1}{2}$ $\left(b=\frac{1}{2}\right)$ のとき，最小値 $\frac{81}{16}$ をとる。

したがって S は $(a\,,b)=\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)$ のとき，**最小値 $\frac{9}{2}$** をとる。

◀ 直感的には，対称性から $a=b$ のとき，最大または最小になるのだろうが，計算(増減表)で示してみた。

〔別解〕 4 次の微分を避ける

$$f(a)=(a^2-a)^2+4(a^2-a)+6$$

$t=a^2-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ とし，

② のとき $-\frac{1}{4}\leqq t<0\cdots$③

$$y=t^2+4t+6=(t+2)^2+2$$

③ の範囲で y は $t=-\frac{1}{4}$ のとき，最小値 $\frac{81}{16}$ をとることがわかる。

5 n を 3 以上の奇数とする。円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相違なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ。

説明のため，円の中心を O とする。n が奇数のとき，正 n 角形の対角線は O を通ることがないので，問題のように作られた三角形は，辺上に O をもつことはない。

したがって，三角形の内部に O を含まない三角形が何個できるか考える。

内部に O を含まない三角形の 3 辺について，O に最短の辺が 1 通りに定まる。さらにその辺の両端の 2 つの頂点を P_i，P_j とし，3 点 O，A_i，A_j が反時計回りに並ぶように A_i，A_j を定め，このときこの三角形を「A_j を代表の頂点とする三角形」と呼ぶことにする。

ここで，ある 1 つの頂点 A_j を代表の頂点とし，内部に点 O を含まない三角形の個数は $n=2m+1$ (m は 2 以上の任意の自然数)

$$ {}_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8} $$

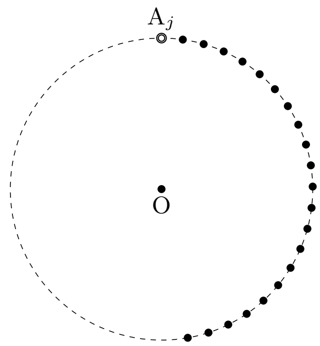
A_j のとり方は n 通りあるので，
内部に O を含まない三角形は $\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$ 個できる。

そして n 個の頂点から 3 個選びできる三角形は

$$ {}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} $$ 個ある。

求める確率 p_n は，余事象の確率の性質を用いて

$$ \begin{aligned} p_n &= 1 - \frac{\frac{n(n-1)(n-3)}{8}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= 1 - \frac{3(n-3)}{4(n-2)} \\ &= \frac{4(n-2)-3(n-3)}{4(n-2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n+1}{4(n-2)}} \end{aligned} $$



A_j 固定し，他の 2 個の頂点は m 個の黒丸から 2 個選ぶ。