1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら，A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5

勝敗が決定した後も，最後まで袋から玉をとり出し続けると考える。

A が 1 回目に取り出すことを A_1，B が 1 回目に取り出すことを B_1 のように表すとする。

そして，赤玉 4 個を R_1，R_2，R_3，R_4，
白玉 5 個を W_1，W_2，W_3，W_4，W_5 で表す。

(1) 引き分けになるのは A_1 から A_5 までには W_1 から W_5 が，B_1 から B_4 までには R_1 から R_4 が並ぶときなので

$$(\text{求める確率}) = \frac{5!4!}{9!} = \boldsymbol{\frac{1}{126}}$$

(2) 場合の数を考える。

- A_1 が R であるのは $\qquad {}_4P_1 \times 8! =$ 通り
- A_1 が W，B_1 が R，A_2 が R であるのは
  ${}_5P_1 \times {}_4P_2 \times 6! =$ 通り
- A_1，A_2 が W，B_1，B_2 が R，A_3 が R であるのは
  ${}_5P_2 \times {}_4P_3 \times 4! =$ 通り
- A_1，A_2，A_3 が W，B_1，B_2，B_3 が R，A_4 が R であるのは
  ${}_5P_3 \times {}_4P_4 \times 2! =$ 通り
- B_4 まで勝負がつかない場合，A_5 が R となることはない

A が勝つのは上記の場合のみで，排反であるから

（求める確率）

$$= \frac{{}_4P_1 \times 8! + {}_5P_1 \times {}_4P_2 \times 6! + {}_5P_2 \times {}_4P_3 \times 4! + {}_5P_3 \times {}_4P_4 \times 2!}{9!}$$

$$= \frac{161280 + 43200 + 11520 + 2880}{9!}$$

$$= \frac{218880}{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

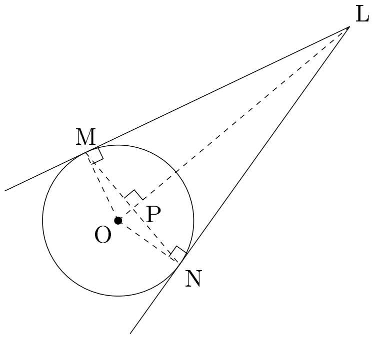
$$= \frac{360 \times 32 \times 19}{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{38}{63}$$

2 平面上の半径 1 の円 C の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる。点 L を通る円 C の 2 本の接線を考え，この 2 本の接線と円 C の接点をそれぞれ M，N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 LMN の面積を求めよ。

(2) 三角形 LMN の内接円の半径 r と，三角形 LMN の外接円の半径 R をそれぞれ求めよ。



MN と OL の交点を P とする。

(1) △OLM について OL $=4$，OM $=1$，$\angle$OML $=90^\circ$ であり，三平方の定理から

$$\mathrm{LM}=\sqrt{\mathrm{OL}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{15}\quad \text{より}$$

$$\sin\angle\mathrm{OLM}=\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OM}}=\frac{1}{4},\quad \cos\angle\mathrm{OLM}=\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LM}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

次に，簡単な平面図形の性質から MP $=$ NP，OL $\perp$ MN が成り立つので

$$\mathrm{MP}=\mathrm{LM}\times\sin\angle\mathrm{MLP}=\sqrt{15}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\mathrm{LP}=\mathrm{LM}\times\cos\angle\mathrm{MLP}=\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{15}{4}\quad \text{とでき}$$

$$\triangle\mathrm{LMN}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}\times\mathrm{LP}=\mathrm{MN}\times\mathrm{LP}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{15}}{16}}$$

(2) (1) の結果を用いて，MN $=$ 2MP $=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ を用いて，内接円の半径と周長の関係

$$\triangle\mathrm{LMN}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{LM}+\mathrm{LN}+\mathrm{MN}\right)r\quad \text{より}$$

$$\frac{15\sqrt{15}}{16}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{15}+\sqrt{15}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)r$$

$$\frac{15\sqrt{15}}{16}=\frac{5\sqrt{15}}{4}r\quad \text{を解いて}\ \boldsymbol{r=\frac{3}{4}}$$

外接円の半径については，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{MN}}{\sin\angle\mathrm{MLN}}=2R\quad \text{を用いて}$$

$$
\begin{aligned}
\sin\angle \mathrm{MLN} &= \sin 2\angle \mathrm{OLM} \\
&= 2\sin\angle \mathrm{OLM}\cos\angle \mathrm{OLM} \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{8}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{MN} = 2R\sin\angle \mathrm{MLN}$

$\dfrac{\sqrt{15}}{2} = 2R\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　を解いて $\boldsymbol{R = 2}$

3 a を実数とし，2 次関数 $f(x)=x^2+2ax-3$ を考える。実数 x が $a \leqq x \leqq a+3$ の範囲を動くときの最大値および最小値を，それぞれ $M(a)$ および $m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $m(a)$ を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

$f(x)=(x+a)^2-a^2-3$ から，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-a$ を用いて

(1)

- $-a<a+\frac{3}{2}$ すなわち $a>-\frac{3}{4}$ のとき

  $M(a)=f(a+3)=(a+3)^2+2a(a+3)-3=3a^2+12a+6$

- $-a=a+\frac{3}{2}$ すなわち $a=-\frac{3}{4}$ のとき

  $M(a)=f(a)=f(a+3)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{21}{16}$

- $a+\frac{3}{2}<-a$ すなわち $a<-\frac{3}{4}$ のとき

  $M(a)=f(a)=a^2+2a^2-3=3a^2-3$

以上から $\boldsymbol{M(a)}\begin{cases}\boldsymbol{3a^2-3} & \left(\boldsymbol{a\leqq -\frac{3}{4}}\right)\\ \boldsymbol{3a^2+12a+6} & \left(\boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}\right)\end{cases}$

(2)

- $-a<a$ すなわち $a>0$ のとき

  $m(a)=f(a)=3a^2-3$

- $a\leqq -a\leqq a+3$ すなわち $-\frac{3}{4}\leqq a\leqq 0$ のとき

  $m(a)=f(-a)=-a^2-3$

- $a+3<-a$ すなわち $a<-\frac{3}{4}$ のとき

  $m(a)=f(a+3)=3a^2+12a+6$

以上から $\boldsymbol{m(a)}\begin{cases}\boldsymbol{3a^2+12a+6} & \left(\boldsymbol{a<-\frac{3}{4}}\right)\\ \boldsymbol{-a^2-3} & \left(\boldsymbol{-\frac{3}{4}\leqq a\leqq 0}\right)\\ \boldsymbol{3a^2-3} & \boldsymbol{(0<a)}\end{cases}$

(3) a の関数として増減表を作成する。

- $a<-\frac{3}{4}$ のとき $m'(a)=6a+12=6(a+2)$
- $-\frac{3}{4}<a<0$ のとき $m'(a)=-2a$
- $0<a$ のとき $m'(a)=6a$

増減表は以下のようになる。

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$m'(a)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
$m(a)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

したがって $m(a)$ の最小値は $\boldsymbol{m(-2)=-6}$

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}\,(\,x\,,\,f(x)\,)$，$\mathrm{Q}\,(\,x+1\,,\,f(x)+1\,)$ を考える。実数 x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

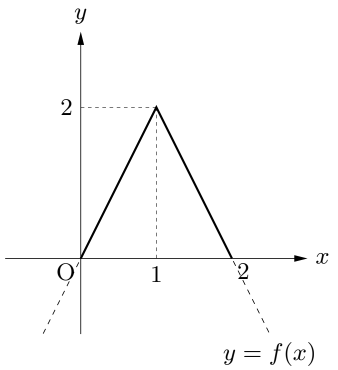
(1) 関数 $f(x) = -2|x-1|+2$ に対して，S の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

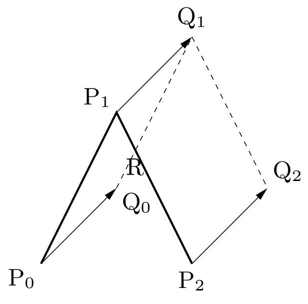
(3) 設問 (2) の関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，S の値を求めよ。

任意の P について $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\,1\,,\,1\,)$ を用いて考える。

(1) $y = f(x)$ のグラフは $y = -2|x|$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 平行移動して得られる。



$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = (\,0\,,\,f(0)\,) = (\,0\,,\,0\,)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\,1\,,\,1\,)$
$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = (\,1\,,\,f(1)\,) = (\,1\,,\,2\,)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\,2\,,\,3\,)$
$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = (\,2\,,\,f(2)\,) = (\,2\,,\,0\,)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\,3\,,\,1\,)$
さらに $\mathrm{P_1P_2}$ と $\mathrm{Q_0Q_1}$ の交点を R としてとして



$S =$（平行四辺形 $\mathrm{P_0Q_0Q_1P_1}$ の面積）
　　$+$（平行四辺形 $\mathrm{P_2Q_2Q_1P_1}$ の面積）$- \triangle \mathrm{RQ_1P_1}$　であり

- 平行四辺形 $\mathrm{P_0Q_0Q_1P_1}$ の面積を S_1 として

$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}} = (1\,,\,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} = (1\,,\,2)$ から

$$S_1 = |1 \times 2 - 1 \times 1| = 1$$

- 平行四辺形 $\mathrm{P_2Q_2Q_1P_1}$ の面積を S_2 として
  $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}} = (1\,,\,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}} = (-1\,,\,2)$ から
  $$S_2 = |1 \times 2 - 1 \times (-1)| = 3$$

- $\triangle\mathrm{RQ_1P_1}$ について
  直線 $\mathrm{P_1P_2}$ の方程式は $y = -2(x-2) = -2x+4$
  直線 $\mathrm{Q_0Q_1}$ の方程式は $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$ から
  $\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{4}\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$ であり
  $\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}} = \left(\dfrac{3}{4}\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RP_1}} = \left(-\dfrac{1}{4}\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$ より
  $$\triangle\mathrm{RQ_1P_1} = \frac{1}{2}\left|\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{3}{8}$$

したがって

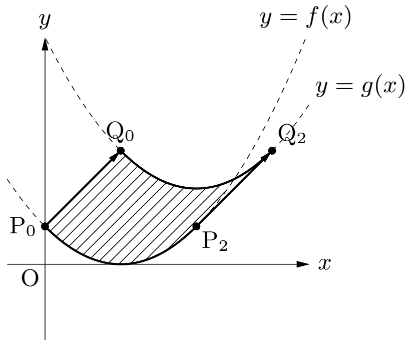
$$S = S_1 + S_2 - \triangle\mathrm{RQ_1P_1} = 1 + 3 - \frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{21}{8}}$$

(2) $f'(x) = x - 1$ であり $f'(x) = 1$ を解くと $x = 2$ であり，求める接線は点 $\left(2\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$ を通り，傾きが 1 の直線より，方程式は

$$y = 1\cdot(x-2) + \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{3}{2}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \left(0\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(1\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$
$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = \left(2\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(3\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$

$y = f(x)$ を x 軸方向，y 軸方向ともに 1 平行移動したものを $y = g(x)$ とする。



S は図の斜線部の面積であり，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ は合同であることを用いて，図の斜線部の線分 $\mathrm{P_0P_2}$ の下にある部分を切り取り，線分 $\mathrm{P_0P_2}$ が線分 $\mathrm{Q_0Q_2}$ に重なるように移動することで，S は平行四辺形 $\mathrm{P_0P_2Q_2Q_0}$ の面積と等しくなることがわかる。

底辺 2，高さ 1 の平行四辺形の面積なので $\boldsymbol{S = 2}$