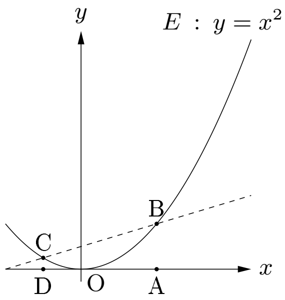
1 a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a, 0)$，点 B を (a, a^2)，点 C を $(-1, 1)$，点 D を $(-1, 0)$ とし，曲線 E を $y = x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。

(1) 直線 BC の方程式を $y = g(x)$ とする。



区間 $-1 \leqq x \leqq a$ では $x^2 \leqq g(x)$ なので

◀ いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式と $\frac{1}{3}$ 公式の見せ場(特に S の計算)

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{a} \{g(x) - x^2\}\,dx \\
&= -\int_{-1}^{a} (x+1)(x-a)\,dx \\
&= -\frac{-1}{6}(a-(-1))^3 \\
&= \frac{1}{6}(a+1)^3
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{-1}^{a} x^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{a} \\
&= \frac{1}{3}\left(a^3 - (-1)^3\right) \\
&= \frac{1}{3}(a^3+1)
\end{aligned}
$$

$S = T$ となるのは

$$\frac{1}{6}(a+1)^3 = \frac{1}{3}(a^3+1) \quad を解く$$

$$
\begin{aligned}
(a+1)^3 &= 2(a^3+1) \\
a^3 - 3a^2 - 3a + 1 &= 0 \\
(a+1)(a^2 - 4a + 1) &= 0 \\
a &= -1,\ 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

◀

-1	1	-3	-3	1
		-1	4	-1
	1	-4	1	0

$1 \leqq a \leqq 4$ の範囲で $\boldsymbol{a = 2 + \sqrt{3}}$

(2) $f(a) = |S - T|$ とする。(1) の経過を利用して

◀ S と T の差は $S - T$ でなく $|S - T|$

- $1 \leqq a \leqq 2 + \sqrt{3}$ のとき $S \geqq T$ から

$$f(a) = S - T = -\frac{1}{6}(a^3 - 3a^2 - 3a + 1)$$

$1 < a < 2 + \sqrt{3}$ の範囲で

$$f'(a) = -\frac{1}{6}(3a^2 - 6a - 3) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1)$$

$f'(a) = 0$ となるのは $a = 1 + \sqrt{2}$

- $2 + \sqrt{3} \leqq a \leqq 4$ のとき $S \leqq T$ から

$$f(a) = T - S = \frac{1}{6}\left(a^3 - 3a^2 - 3a + 1\right)$$

$2 + \sqrt{3} < a < 4$ で

$$f'(a) = \frac{1}{2}\left(a^2 - 2a - 1\right)$$

$f'(a) = 0$ となる a は存在しない。

$1 \leqq a \leqq 4$ の範囲で増減表は，$\alpha = 1 + \sqrt{2}$，$\beta = 2 + \sqrt{3}$ として

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	4
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(4)$

最大値は $f(\alpha)$ または $f(4)$ のいずれかなので比較する。

$f(a)$ について $a^3 - 3a^2 - 3a + 1$ を $a^2 - 2a - 1$ で割り算し

◀

$$\begin{array}{r}
a \quad -1 \\
a^2 - 2a - 1 \,\big)\, \overline{a^3 - 3a^2 - 3a + 1} \\
\underline{a^3 - 2a^2 \quad - a} \\
-a^2 - 2a + 1 \\
\underline{-a^2 + 2a + 1} \\
-4a
\end{array}$$

$$f(a) = -\frac{1}{6}\left((a^2 - 2a - 1)(a - 1) - 4a\right) \quad \text{から}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= -\frac{1}{6}\left((\alpha^2 - 2\alpha - 1)(\alpha - 1) - 4\alpha\right) \\
&= -\frac{1}{6}(0 - 4\alpha) \quad (\because\ \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0) \\
&= \frac{1}{6} \cdot 4\alpha \\
&= \frac{4\left(1 + \sqrt{2}\right)}{6} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

$$f(4) = \frac{1}{6}(64 - 48 - 12 + 1) = \frac{5}{6} \quad \cdots ②$$

◀ $f(\alpha) = f(x)$ $(x \fallingdotseq \alpha)$ となる x を求めておくとよい場合もある。

①，② から $f(\alpha) > f(4)$ より求める値は $\boldsymbol{a = 1 + \sqrt{2}}$

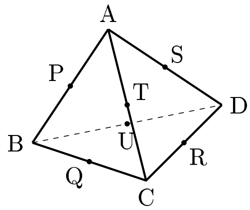
2 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。
このとき
$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=4$,
$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2$ である。



◀ ここではベクトルを用いた解答を示した。平面図形を用いた解答は文系のを参照

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$ であり

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\frac{1}{2}|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$$

$$\begin{aligned}&|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|^2\\&=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{d}\cdot\vec{b}\\&=4+4+4-4+4-4\\&=8\end{aligned}$$

$|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|>0$ から $|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|=2\sqrt{2}$
したがって $\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{2}}$

◀ 平面図形を用いた解答では，$\angle\mathrm{APR}=90^\circ$ を示し，$\mathrm{AP}=1$，$\mathrm{AR}=\sqrt{3}$ と三平方の定理を用いて $\mathrm{PR}=\sqrt{3}$ を求めている。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$,

$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$ である。

ここで

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{BS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BR}}\\&=\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\\&=|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2\\&=4-1-1-1+\frac{1}{2}+1\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BS}}|^2=\left|-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2$$

◀ 平面図形を用いる解答では $\mathrm{BS}=\mathrm{BR}=\sqrt{3}$，$\mathrm{SR}=1$ から $\cos\angle\mathrm{SBR}$ を求めている。

$$= \frac{1}{4}|-2\vec{b} + \vec{d}|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(4|\vec{b}|^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(16 - 8 + 4)$$

$= 3$　から

$$|\overrightarrow{\mathrm{BS}}| = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2 = \left|-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}|-2\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(4|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{d} - 4\vec{d}\cdot\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(16 + 4 + 4 - 8 + 4 - 8)$$

$= 3$　から

$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}| = \sqrt{3}$$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{SBR} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BS}}||\overrightarrow{\mathrm{BR}}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = \overrightarrow{\mathrm{UR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から 4 点 P，T，R，U は同一平面上にある。この平面を α とする。Q から平面 α への垂線の足を E とすると実数 t，u を用いて

◀ あまり「対称性」を多用することなく垂線の足を決定した。(例えば AD ⊥ BC を示すと，PTRU が正方形となることはすぐにわかる)

$$\overrightarrow{\mathrm{PE}} = t\overrightarrow{\mathrm{PT}} + u\overrightarrow{\mathrm{PU}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QE}} = \overrightarrow{\mathrm{PE}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{PT}} + u\overrightarrow{\mathrm{PU}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdots ①$　とできる。

$\overrightarrow{\mathrm{QE}} \perp \alpha$ から $\overrightarrow{\mathrm{QE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PT}} \cdots ②$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{QE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PU}} \cdots ③$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PU}}|^2 = 1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} = \overrightarrow{\mathrm{PU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}} == \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{d}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{c}\cdot\vec{d} - \vec{b}\cdot\vec{d})$$

$= 0 \cdots ④$　を用いて

② より $\overrightarrow{\mathrm{QE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} = 0$ から

$$(t\overrightarrow{\mathrm{PT}} + u\overrightarrow{\mathrm{PU}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} = 0$$

$$t|\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2 + u\overrightarrow{\mathrm{PU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} = 0$$

$t - \frac{1}{2} = 0$　となり $t = \frac{1}{2}$

③ より $\overrightarrow{\mathrm{QE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=0$ から

$$(t\overrightarrow{\mathrm{PT}}+u\overrightarrow{\mathrm{PU}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=0$$

$$t\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}+u\left|\overrightarrow{\mathrm{PU}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=0$$

$u-\dfrac{1}{2}=0$ となり $u=\dfrac{1}{2}$

① から $\overrightarrow{\mathrm{QE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PT}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PU}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であり

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{QE}}\right|^2&=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{PT}}+\overrightarrow{\mathrm{PU}}-2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\Big(\left|\overrightarrow{\mathrm{PT}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PU}}\right|^2+4\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\\&\qquad+\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}-4\overrightarrow{\mathrm{PU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}}\Big)\\&=\frac{1}{4}(1+1+4+0-2-2)\\&=\frac{2}{4}\quad\text{から}\ \left|\overrightarrow{\mathrm{QE}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

また ④ から平行四辺形 PTRU は一辺が 1 の正方形となるので，その面積は 1 から

$$(\text{求める体積})=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A = \{x \mid x^3 - x^2 - (k^2+4k+4)\,x + k^2 + 4k + 4 = 0\}$$

$$B = \{x \mid x^3 - (k^2+3k+3)\,x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k = -1$ のとき，集合 A，B，$A \cap B$，$A \cup B$ を $\{a,\,b,\,c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。

A について

$x^3 - x^2 - (k^2+4k+4)\,x + k^2 + 4k + 4 = 0$　を解く

$x^2\,(x-1) - (k^2+4k+4)\,(x-1) = 0$

$(x-1)\left\{x^2 - (k+2)^2\right\} = 0$

$(x-1)(x+(k+2))(x-(k+2)) = 0$　から $x = 1, \pm(k+2)$

B について

$x^3 - (k^2+3k+3)\,x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0$　を解く

$x\,(x^2+k^2) - (k^2+3k+3)(x^2+k^2) = 0$

$(x-(k^2+3k+3))\,(x^2+k^2) = 0$　から

$k = 0$ のとき $x = 3,\,0$　$k \fallingdotseq 0$ のとき $x = k^2+3k+3$

◀ $\{x \mid x$ についての条件(式)$\}$ は条件(文)を満たす x の集合
通常，条件は「偶数」,「素数」など文になることも多いが，この問題では 3 次方程式になっている。

(1) $k = -1$ のとき

$\boldsymbol{A = \{1,\ -1\}}$,　$\boldsymbol{B = \{1\}}$,

$\boldsymbol{A \cap B = \{1\}}$,　$\boldsymbol{A \cup B = \{1,\ -1\}}$

◀ $k = -1$ のときだけでよいのなら，具体的に代入して求めてもよい。(後で苦労しますが)

(2) $k = 0$ のとき $0 \in B$ かつ $0 \notin A$ から $B \subset A$ となることはない。

以下 $k \fallingdotseq 0$ で考える。$B \subset A$ となるのは

- $k^2 + 3k + 3 = 1$ のとき

  $k^2 + 3k + 2 = 0$

  $(k+1)(k+2) = 0$　すなわち $k = -1,\ -2$

- $k^2 + 3k + 3 = k + 2$ のとき

  $k^2 + 2k + 1 = 0$

  $(k+1)^2 = 0$　すなわち $k = -1$

◀ $B \subset A$ となる，必要条件を求める。(自動的に十分条件になる)

- $k^2+3k+3=-(k+2)$ のとき

$$k^2+4k+5=0$$

$$(k+2)^2+1=0$$ となり実数解をもたない

以上から $\boldsymbol{k=-1,\ -2}$

(3) 集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする。(1)，(2) から

◀ 適当な表（または図）にして表すと簡明になることが多い

	$k=0$	$k=-1$	$k=-2$	$k=-3$	その他
$n(A)$	3	2	2	2	3
$n(B)$	2	1	1	1	1
$n(A\cap B)$	0	1	1	0	0

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

$k=0$ のとき 5 個

$k=-1$ のとき 2 個

$k=-2$ のとき 2 個

$k=-3$ のとき 3 個

上記以外のとき 4 個

$\boxed{4}$ a，b を正の数とし，座標平面上の曲線

$$C_1 : y = e^{ax}, \qquad C_2 : y = \sqrt{2x - b}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x - b}$ の導関数を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3) (2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

(1) $f(x) = e^{ax}$，$g(x) = \sqrt{2x - b}$ とする。

$$f'(x) = e^{ax} \cdot (ax)' = \boldsymbol{ae^{ax}}$$

$$g'(x) = \frac{(2x - b)'}{2\sqrt{2x - b}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2x - b}}}$$

◀ $(e^u)' = e^u \times u'$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

(2) C_1 と C_2 が $x = p$ で接するとき

$$\begin{cases} f(p) = g(p) \cdots ① \\ f'(p) = g'(p) \cdots ② \end{cases} \quad \text{である。}$$

◀ 微分可能な 2 曲線が $x = p$ で接する条件

① は

$$e^{ap} = \sqrt{2p - b} \cdots ③$$

② は

$$ae^{ap} = \frac{1}{\sqrt{2p - b}} \cdots ④$$

③ を ④ に代入し

$$ae^{ap} = \frac{1}{e^{ap}}$$

$$e^{ap} = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdots ⑤ \quad (\because e^{ap} > 0)$$

$$ap = \log\sqrt{\frac{1}{a}} = -\frac{1}{2}\log a$$

したがって $p = -\dfrac{1}{2a}\log a$

点 P の座標は (p, e^{ap}) すなわち $\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2a}\log a, \sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}$

b については ③ の辺々を平方し，⑤ を用いると

$$\frac{1}{a} = 2p - b \cdots ⑥$$

$$\begin{aligned} b &= 2p - \frac{1}{a} \\ &= -\frac{1}{a}\log a - \frac{1}{a} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{a}(\log a + 1)} \end{aligned}$$

ただし $b > 0$ から $\log a + 1 < 0$ より $\boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{e}}$

(3) C_2 の x 切片は $\dfrac{b}{2}$ であり，(2) の p を用いて，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^p f(x)\,dx - \int_{\frac{b}{2}}^p g(x)\,dx \quad \text{となる。}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^p f(x)\,dx &= \int_0^p e^{ax}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^p \\ &= \frac{1}{a}\left(e^{ap} - e^0\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{b}{2}}^p g(x)\,dx &= \int_{\frac{b}{2}}^p \sqrt{2x-b}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(2x-b)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{b}{2}}^p \\ &= \frac{1}{3}\left\{(2p-b)^3 - 0^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\because ⑥) \quad \text{から}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3a}\left(\sqrt{\frac{4}{a}} - 3\right)}\end{aligned}$$

◀ 求める部分の境界や，積分区間を確定させる。

$\boxed{5}$ 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$w = -\dfrac{2(2z - i)}{z+1}$ $(z \neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z = i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

(2) z を w を用いて表せ。

(3) 点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

(1) $z = i$ のとき

$$\begin{aligned} w &= -\frac{2(2i - i)}{i+1} \\ &= \frac{-2i}{1+i} \\ &= \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= -i(1-i) \\ &= -1 - i \end{aligned}$$

したがって w の**実部は -1**，**虚部は -1**

◀ 単なる数値計算と用語の問題（虚部は $-i$ でなく -1 です。）

(2) 与えられた等式を z について解く。

$$w(z+1) = -2(2z - i)$$

$$(w+4)z = -w + 2i \cdots ①$$

① において $w + 4 = 0$ とすると（左辺）$= 0$，（右辺）$\neq 0$ から $w + 4 \neq 0$ となる。① の両辺を $w+4$ で割り

$$\boldsymbol{z = \frac{-w + 2i}{w + 4}}$$

◀ 割り算したいから $w \neq 4$ でなく，$w \neq 4$ なので割り算することができるというのが正しい論法です。

(3) $|z| = 1$ から

$$\left|\frac{-w + 2i}{w+4}\right| = 1$$

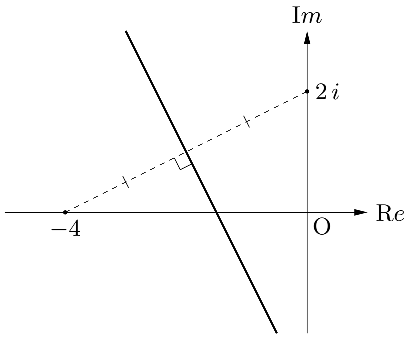
$$\frac{|-w + 2i|}{|w+4|} = 1$$

$$|-w + 2i| = |w + 4|$$

$$|w - 2i| = |w + 4|$$

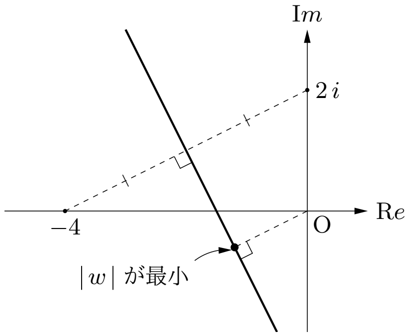
w は 2 点 $2i$，-4 を両端とする線分の垂直二等分線を描く

◀ 厳密には，直線すべて（線分などの一部ではない）であることを一言添えなければいけないかもしれません。しかしそれは難しい。



(4) $|w|$ は点 0 から w までの距離なので，$|w|$ が最小となるのは 0 から (3) で求めた直線への垂線の足

◀ $|w|$ の最小値は点 0 から一番近い点 w を見つける。



xy 平面で考えて，w の軌跡は点 $(-2, 1)$ を通る傾き -2 の直線

$y = -2(x+2)+1 = -2x-3 \cdots ②$ 　であり

◀ 複素数平面で計算するのは大変なので xy 平面で考えた。

O から ① への垂線は $y = \dfrac{1}{2}x \cdots ③$

① と ② の交点の x 座標は

$-2x-3 = \dfrac{1}{2}x$ 　を解いて $(x, y) = \left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

したがって $|w|$ を最小にするのは $w = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i \cdots ④$

このとき $|w|$ の最小値は $\sqrt{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$

z については (2) に結果に ④ を代入し

$$z = \frac{\frac{3}{5}(2+i)+2i}{-\frac{3}{5}(2+i)+4}$$

$$= \frac{3(2+i)+10i}{-3(2+i)+20}$$

$$= \frac{6+13i}{14-3i}$$

$$= \frac{(6+13i)(14+3i)}{(14-3i)(14+3i)}$$

$$= \frac{45+200i}{196+9}$$

$$= \boldsymbol{\frac{9+40i}{41}} \quad \left(\frac{9}{41}+\frac{40}{41}i\right)$$

6 座標空間の 2 点 A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，△ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA} = \frac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}\left(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4\right)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 中心 C は線分 AB の中点である $(1,\ -1,\ 3)$，S の半径を r とすると $2r = \mathrm{AB} = 4$ から $r = 2$ となり S の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4}$$

◀ 中心と半径が与えられた球面の方程式

(2) AB を含む平面で S を切断したときの断面は，AB を直径とする円である。

P がこの円周上を動くとき，△ABP が最大となるのは，P と AB との距離 d が最大になるときであり，それは PA = PB の直角二等辺三角形となるときである。このとき $d = r = 2$ より

$$（求める最大値）= \frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times d = \frac{1}{2}\times 4\times 2 = \mathbf{4}$$

◀ AB が直径なので話は簡単

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = (x-1,\ y+1,\ z-3)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (0,\ 0,\ -2)$ であり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right| = r = 2,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = 2,\quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -2(z-3)$$

$\angle\mathrm{QCA} = \frac{\pi}{3}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\cos\angle\mathrm{QCA}$$ に代入し

$$-2(z-3) = 2\times 2\times\frac{1}{2}$$

$z-3=-1$ より $z=2$ となる。改めて

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = (x-1,\ y+1,\ -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{CR}} = \left(\sqrt{2},\ 1,\ 1\right)$$

Q が S 上にあるので $(x-1)^2+(y+1)^2+1^2=4$

すなわち $(x-1)^2+(y+1)^2=3$ および $y\geqq 0\cdots$① のもとで $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \sqrt{2}(x-1)+(y+1)-1\cdots$② の範囲を考える。

◀ 条件式 ①(平方和) のもとで，②(1 次式) の評価については
- 領域における最大最小
- 三角関数による置きかえとその合成
- ベクトルによる置きかえと内積

3 つの解法が考えられる。

$X = x-1$，$Y = y+1$ として ① は

$$X^2+Y^2=3,\quad Y\geqq 1\cdots③$$

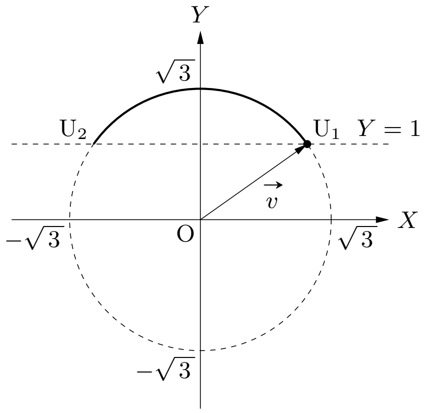
② は $\sqrt{2}X+Y+1\cdots$④ とできる。

2 つの平面ベクトル $\vec{u}$，v を

$$\vec{u} = (X,\ Y),\quad \left|\vec{v}\right| = \left(\sqrt{2},\ 1\right)$$ とすると

③ から $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{3}$，そして ④ は $\vec{u}\cdot\vec{v}-1$ とできる。

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ のとり得る範囲を考える。



$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OU}}$ とすると，U の存在範囲は図の $\mathrm{U}_1\left(\sqrt{2},\ 1\right)$，$\mathrm{U}_2\left(-\sqrt{2},\ 1\right)$ を両端とする円弧上にある。

図から $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}_2}\cdot\vec{v} \leqq \vec{u}\cdot\vec{v} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OU}_1}\cdot\vec{v}$$

$$-1 \leqq \vec{u}\cdot\vec{v} \leqq 3$$

④ から $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \vec{u}\cdot\vec{v} - 1$ より

$$\boldsymbol{-2 \leqq \overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}} \leqq 2}$$