$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 次の不等式を解きなさい。

$$|5x-1|+2 \geqq 3$$

(2) 不等式 $4-3x \leqq 4x \leqq x+2a$ を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような正数 a の値を求めなさい。

(3) 次の式を簡単にしなさい。

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 m がいろいろな値をとって変わるとき，放物線

$$y=x^2-mx+2m$$

の頂点を動く範囲を表す 2 次方程式を求めなさい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ C を xy 平面上の曲線 $y=x^3$ とするとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ において C と接し，点 $\left(-\dfrac{1}{3}, -3\right)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

(2) (1) で求めた直線と C によって囲まれる領域の面積を求めなさい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|5x-1| \geqq 1$

$5x-1 \leqq -1,\ 1 \leqq 5x-1$

$5x \leqq 0,\ 2 \leqq 5x$

$\boldsymbol{x \leqq 0,\ \frac{2}{5} \leqq x}$

(2) $\begin{cases} 4-3x \leqq 4x \cdots ① \\ 4x \leqq x+2a \cdots ② \end{cases}$ として考える。

① は $4 \leqq 7x$ から $\frac{4}{7} \leqq x$

② は $3x \leqq 2a$ から $x \leqq \frac{2}{3}a$

与えられた不等式が解をもつのは $\frac{4}{7} \leqq \frac{2}{3}a \cdots ③$ のときで，その解は $\frac{4}{7} \leqq x \leqq \frac{2}{3}a \cdots ④$ となる。

④ の範囲にちょうど 2 個の整数が存在するときは，その 2 個の整数は $x=1,\ 2$ に限られるので，求める条件は

$2 \leqq \frac{2}{3}a < 3$ （これは ③ を満たす） すなわち $\boldsymbol{6 \leqq a < 9}$

(3)
$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sqrt{14-2\sqrt{45}} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{9}-\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \left|\sqrt{9}-\sqrt{5}\right| \\
&= \sqrt{9}-\sqrt{5} \\
&= \boldsymbol{3-\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

2 放物線の方程式は

$$y=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+2m \quad \text{とでき}$$

頂点を $(\,x\,,\,y\,)$ とすると $x=\dfrac{m}{2}\cdots$①，$y=-\dfrac{m^2}{2}+2m\cdots$② である。

m がすべての実数をとるとき，x もすべての実数をとる。また ① から $m=2x$ を ② に代入し

$$y=-\frac{(2x)^2}{2}+2\,(2x)$$

求める方程式は $\boldsymbol{y=-2x^2+4x}$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $y' = 3x^2$ より $(a\,,\,a^3)$ における接線の方程式は

$$y = 3a^2(x-a) + a^3 = 3a^2x - 2a^3 \quad \cdots ①$$

① が $\left(-\frac{1}{3}\,,\,-3\right)$ を通るとき

$$-3 = 3a^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 2a^3 \quad \text{を解く。}$$

$$2a^3 + a^2 - 3 = 0$$

$$(a-1)(2a^2+3a+a) = 0$$

1	2	1	0	−3
		2	3	3
	2	3	3	0

実数解は $a=1$ のみ。① に代入し，求める方程式は

$\boldsymbol{y = 3x - 2}$ $\cdots ②$

(2) C と ② の共有点の x 座標は

$$x^3 = 3x - 2 \quad \text{を解く。}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \text{から} \quad x = 1,\ -2$$

区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ において $x^3 \geqq 3x-2$ より，

$$\begin{aligned}
(\text{求める面積}) &= \int_{-2}^{1} \{x^3 - (3x-2)\}\,dx \\
&= \int_{-2}^{1} (x-1)^2(x+2)\,dx \\
&= \int_{-2}^{1} (x-1)^2(x-1+3)\,dx \\
&= \int_{-2}^{1} \left\{(x-1)^3 + 3(x-1)^2\right\}dx \\
&= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^3\right]_{-2}^{1} \\
&= 0 - \left(\frac{81}{4} - 27\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{27}{4}}
\end{aligned}$$