1 (1) 次の不等式を解きなさい。

$$\frac{x-7}{2} < x \leqq \frac{3x+5}{3} - 1$$

(2) 次の式を計算しなさい。

$$\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$$

(3) 次の 3 次方程式で表されるグラフと x 軸で囲まれた 2 つの領域の面積の和を求めなさい。

$$y = x\,(x-3)(-x-1)$$

2 C を xy 平面上の曲線 $y=(x-3)^3$ とするとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 点 $\mathrm{P}\left(a\,,\,(a-3)^3\right)$ として, (ただし $a \fallingdotseq 3$)，点 P における曲線 C の接線が x 軸と交わる点の座標を求めなさい。

(2) 点 $\mathrm{P}_0\,(\,2\,,\,-1\,)$ における曲線 C の接線と x 軸の交点 $\mathrm{Q}_1 = (\,a_1\,,\,0\,)$ とし，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}_1\,(\,a_1\,,\,b_1\,)$ をとる。点 $\mathrm{P}_1\,(\,a_1\,,\,b_1\,)$ における曲線 C の接線と x 軸の交点を $\mathrm{Q}_2\,(\,a_2\,,\,0\,)$ とし，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}_2\,(\,a_2\,,\,b_2\,)$ をとる。以下，同様にして順に $\mathrm{Q}_3\,(\,a_3\,,\,0\,)$ から $\mathrm{P}_3\,(\,a_3\,,\,b_3\,)$ を求めていくと，$\mathrm{Q} = (\,a_n\,,\,0\,)$ から $\mathrm{P}_n\,(\,a_n\,,\,b_n\,)$ を定めることができる。

このとき，a_n と a_{n+1} $(n \geqq 1)$ の関係を求めなさい。

(3) a_n を求めなさい。

3 以下の問いに答えなさい。

(1) 3 直線 $x-3y+18=0$，$x+2y-12=0$，$x+y-10=0$ の囲む三角形の頂点の座標をそれぞれ求めなさい。

(2) (1) で求めた 3 点からなる三角形の外接円の方程式を求めなさい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\begin{cases} \dfrac{x-7}{2} < x \cdots ① \\ x \leqq \dfrac{3x+5}{3} - 1 \cdots ② \end{cases}$ とする。

① は $x - 7 < 2x$

$-x < 7$ すなわち $x > -7$

② は $3x \leqq 3x + 5 - 3$

$0 \leqq 2$ これはすべての x について成り立つ。

求める解は ① と ② の共通範囲である $\boldsymbol{x > -7}$

(2)

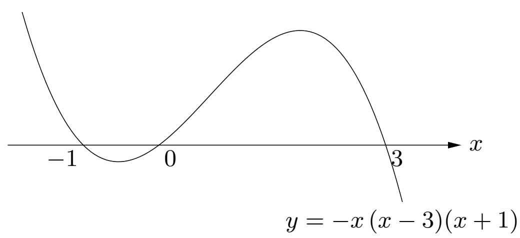
$$(\text{与式}) = \frac{(\sqrt{11}+1)(\sqrt{11}+\sqrt{7}) - (\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})}$$
$$= \frac{(11+\sqrt{77}+\sqrt{11}+\sqrt{7}) - (11-\sqrt{77}-\sqrt{11}+\sqrt{7})}{11-7}$$
$$= \frac{2\sqrt{77}+2\sqrt{11}}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{77}+\sqrt{11}}{2}} \quad \left(= \frac{\sqrt{11}\,(\sqrt{7}+1)}{2} \right)$$

(3) $y = -x\,(x-3)(x+1)$ $\cdots$ ③ とできて，① のグラフと x 軸との共有点の x 座標は小さい順に $-1, 0, 3$ である。

$-1 \leqq x \leqq 0$ で $y \leqq 0$ より，この区間での領域の面積を S_1 とすると $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ として

$$S_1 = -\int_{-1}^{0} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx$$
$$= \int_{0}^{-1} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx \qquad \text{(定積分の下端が 0 となるように工夫した(やらなくてもよい))}$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{-1}$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{7}{12}$$

$0 \leqq x \leqq 3$ で $y \geqq 0$ より，この区間での領域の面積を S_2 とすると



$$S_2 = \int_{0}^{3} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{3}$$
$$= -\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2}$$
$$= \frac{45}{4}$$

したがって求める面積は $S_1 + S_2 = \dfrac{142}{12} = \boldsymbol{\dfrac{71}{6}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C について $y' = 3(x-3)^2$ であり $x = a$ のとき $y' = 3(a-3)^2$ であり，P における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 3(a-3)^2(x-a) + (a-3)^3 \\ &= 3(a-3)^2 x - 3a(a-3)^2 + (a-3)^3 \\ &= 3(a-3)^2 x + (a-3)^2(-3a + (a-3)) \\ &= 3(a-3)^2 x - (a-3)^2(2a+3) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① と x 軸との交点の x 座標は ① で $y=0$ として $0 = 3(a-3)^2 x - (a-3)^2(2a+3)$ を解く。

$$3(a-3)^2 x = (a-3)^2(2a+3)$$

両辺を $3(a-3)^2 \fallingdotseq 0$ で割り $x = \dfrac{2a+3}{3}$ から，求める座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{2a+3}{3},\ 0\right)}$

〔別解〕 導関数を工夫しなかった(もとの関数を展開した)場合の解答

C は $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$，$y' = 3x^2 - 18x + 27$ であり $x = a$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 18a + 27)(x-a) + a^3 - 9a^2 + 27a - 27 \\ &= (3a^2 - 18a + 27)x - 2a^3 + 9a^2 - 27 \end{aligned}$$

$y = 0$ として $0 = (3a^2 - 18a + 27)x - 2a^3 + 9a^2 - 27$ を解く。

$$(3a^2 - 18a + 27)x = 2a^3 - 9a^2 + 27$$

両辺 $3a^2 - 18 + 27 \fallingdotseq 0$ で割り $x = \dfrac{2a^3 - 9a^2 + 27}{3a^2 - 18a + 27} = \sim\sim\sim$ (ここがしっかり計算できるかどうかが分岐点)

(2) ① の a を a_n に変えたとき，① と x 軸との交点の x 座標が a_{n+1} となるので，求める関係式は

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{3}} \quad \cdots ②$$

(3) $a_1 = \dfrac{2 \cdot 2 + 3}{3} = \dfrac{7}{3}$ である。

② は $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1$ とでき，両辺から 3 を引くと

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}a_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3) \quad \text{とできて}$$

これは，数列 $\{a_n - 3\}$ が，初項 $a_1 - 3 = \dfrac{7}{3} - 3 = -\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列となることを表すので

$$a_n - 3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

したがって $\boldsymbol{a_n = 3 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 説明のため $x-3y=-18\cdots$①，$x+2y=12\cdots$②，$x+y=10\cdots$③ とする。

(1)
- ① と ② の交点の座標は

  ①$\times 2+$②$\times 3$ から $5x=0$ より $x=0$

  ②$-$① から $5y=30$ より $y=6$
- ① と ③ の交点の座標は

  ①$+$③$\times 3$ から $4x=12$ より $x=3$

  ③$-$① から $4y=28$ より $y=7$
- ② と ③ の交点の座標は

  ②$-$③$\times 2$ から $-x=-8$ より $x=8$

  ②$-$③ から $y=2$

したがって 3 つの座標は $\mathbf{(0,6)}$, $\mathbf{(3,7)}$, $\mathbf{(8,2)}$

(2) A$(0,6)$，B$(3,7)$，C$(8,2)$ とする。△ABC の外接円の中心は各辺の垂直二等分線の交点である。
- 辺 AB の垂直二等分線の方程式は

$$(x-0)^2+(y-6)^2=(x-3)^2+(y-7)^2$$

$$x^2+y^2-12y+36=x^2-6x+9+y^2-14y+49$$

$$6x+2y=22 \quad \text{すなわち } 3x+y=11\cdots④$$

- 辺 AC の垂直二等分線の方程式は

$$(x-0)^2+(y-6)^2=(x-8)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+y^2-12y+36=x^2-16x+64+y^2-4y+4$$

$$16x-8y=32 \quad \text{すなわち } 2x-y=4\cdots⑤$$

④ と ⑤ の交点の座標は $(3,2)$ である。これが外接円の中心である。

$(3,2)$ から A，B，C までの距離はいずれも 5 であり，これが外接円の半径となるので，求める外接円の方程式は

$$\mathbf{(x-3)^2+(y-2)^2=25}$$

〔研究〕

辺 AB の垂直二等分線の方程式を求め方として，AB の中点 $\left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$，(AB の傾き) $=\frac{7-6}{3-0}=\frac{1}{3}$ から

$y=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{13}{2}$　としてもよい

上の解答は分数が出現することを避けた，軌跡の考え方(垂直二等分線は 2 点から等距離にある点の軌跡)を用いた