1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 6n - 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする。$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n を用いて表せ。

(1) $a_{n+1} = 4a_n + 6n - 2 \cdots$ ① とする。n を $n+1$ に変えて

$a_{n+2} = 4a_{n+1} + 6(n+1) - 2 \cdots$ ②

② − ① から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n) + 6 \quad \text{すなわち}$$

$$b_{n+1} = 4b_n + 6$$

辺々 2 を加えて

$$b_{n+1} + 2 = 4b_n + 6 + 2 = 4(b_n + 2) \ \cdots ③$$

また ① に $n = 1$ を代入し $a_2 = 4a_1 + 6 - 2 = 8$ から

$b_1 = a_2 - a_1 = 8 - 1 = 7$ と ③ から

数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = 7 + 2 = 9$，公比 4 の等比数列となることを表すので

$$b_n + 2 = 9\cdot 4^{n-1} \quad \text{したがって } \boldsymbol{b_n = 9\cdot 4^{n-1} - 2}$$

◀ 与えられた漸化式の形では番号を 1 つ上げて（増やして）引き算するすると階差数列が得られる。

◀ 隣接 2 項間漸化式の基本形

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(9\cdot 4^{k-1} - 2\right) \quad (\because (1)) \\ &= 1 + \frac{9\left(4^{n-1} - 1\right)}{4 - 1} - 2(n-1) \\ &= 3\cdot 4^{n-1} - 2n \end{aligned}$$

これは $a_1 = 1$ を満たす。したがって $\boldsymbol{a_n = 3\cdot 4^{n-1} - 2n}$

◀ $a_{n+1} - a_n$（階差数列）が決定されたときの一般項の表し方

(3) (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(3\cdot 4^{k-1} - 2k\right) \\ &= \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{4^n - 1 - n(n+1)} \end{aligned}$$

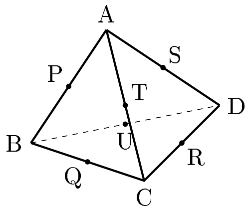
◀ 右辺の第 1 項は，初項 3，公比 4，項数 n の等比数列の和

$\boxed{\mathbf{2}}$ 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。



(1) $\mathrm{RA}=\mathrm{RB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=1$ より P は二等辺三角形 RAB の底辺 AB の中点なので $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となる。

◀ 平面図形 △ABR で考える

三平方の定理より

$$\mathrm{PR}=\sqrt{\mathrm{RA}^2-\mathrm{AP}^2}=\sqrt{3-1}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2) △SBR について $\mathrm{BS}=\mathrm{BR}=\sqrt{3}$，$\mathrm{SR}=1$ であり，余弦定理から

◀ 平面図形 △SBR で考える

$$\cos\angle\mathrm{SBR}=\frac{\mathrm{BS}^2+\mathrm{BR}^2-\mathrm{SR}^2}{2\mathrm{BS}\cdot\mathrm{BR}}=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

(3) 中点連結定理より $\mathrm{PT}=\mathrm{UR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$，$\mathrm{PU}=\mathrm{TR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=2$ から四角形 PTRU はひし形をなす。

その面積は $\dfrac{1}{2}\times\mathrm{PR}\times\mathrm{TU}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$

次に Q からひし形 PTRU に下ろした垂線の足を E とすると $\mathrm{QP}=\mathrm{QT}=\mathrm{QR}=\mathrm{QU}=1$ であり，直角三角形の合同条件から

◀ この部分は厳密な証明であり，「対称性などから ...」ですむ場合もある。

$$\triangle\mathrm{QPE}\equiv\triangle\mathrm{QTE}\equiv\triangle\mathrm{QRE}\equiv\triangle\mathrm{QUE}\quad \text{となり}$$

$$\mathrm{PE}=\mathrm{TE}=\mathrm{QE}=\mathrm{UE}\quad \text{が成り立つので}$$

E は PR の中点であるから $\mathrm{PE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PR}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

◀ 上の（厳密な）証明でいいたかったのは「E は PR の中点」ということ

△QPE は $\angle\mathrm{QEP}=90^\circ$ であり，三平方の定理から

$$\mathrm{QE}=\sqrt{\mathrm{QP}^2-\mathrm{PE}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって

$$\text{（求める体積）}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

3 k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A=\{x\mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)\,x+k^2+4k+4=0\}$$

$$B=\{x\mid x^3-(k^2+3k+3)\,x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を $\{a,\,b,\,c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

A について

$x^3-x^2-(k^2+4k+4)\,x+k^2+4k+4=0$　を解く

$x^2\,(x-1)-(k^2+4k+4)\,(x-1)=0$

$(x-1)\left\{x^2-(k+2)^2\right\}=0$

$(x-1)(x+(k+2))(x-(k+2))=0$　から $x=1,\pm(k+2)$

B について

$x^3-(k^2+3k+3)\,x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0$　を解く

$x\,(x^2+k^2)-(k^2+3k+3)(x^2+k^2)=0$

$(x-(k^2+3k+3))\,(x^2+k^2)=0$　から

$k=0$ のとき $x=3,\,0$　$k\fallingdotseq 0$ のとき $x=k^2+3k+3$

(1) $k=-1$ のとき

$A=\{1,\,-1\}$，　$B=\{1\}$，

$A\cap B=\{1\}$，　$A\cup B=\{1,\,-1\}$

(2) $k=0$ のとき $0\in B$ かつ $0\notin A$ から $B\subset A$ となることはない。

以下 $k\fallingdotseq 0$ で考える。$B\subset A$ となるのは

- $k^2+3k+3=1$ のとき

  $k^2+3k+2=0$

  $(k+1)(k+2)=0$　すなわち $k=-1,\,-2$

- $k^2+3k+3=k+2$ のとき

  $k^2+2k+1=0$

  $(k+1)^2=0$　すなわち $k=-1$

◀ $\{x\mid x$ についての条件(式)$\}$ は条件(文)を満たす x の集合
通常，条件は「偶数」,「素数」など文になることも多いが，この問題では 3 次方程式になっている。

◀ $k=-1$ のときだけでよいのなら，具体的に代入して求めてもよい。(後で苦労しますが)

◀ $B\subset A$ となる，必要条件を求める。(自動的に十分条件になる)

- $k^2+3k+3=-(k+2)$ のとき

  $k^2+4k+5=0$

  $(k+2)^2+1=0$　となり実数解をもたない

以上から $\boldsymbol{k=-1,\ -2}$

(3) 集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする。(1)，(2) から

◀ 適当な表（または図）にして表すと簡明になることが多い

	$k=0$	$k=-1$	$k=-2$	$k=-3$	その他
$n(A)$	3	2	2	2	3
$n(B)$	2	1	1	1	1
$n(A\cap B)$	0	1	1	0	0

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

$k=0$ のとき 5 個

$k=-1$ のとき 2 個

$k=-2$ のとき 2 個

$k=-3$ のとき 3 個

上記以外のとき 4 個

4 p は $p \geqq 0$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9 - p^2)\,x$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $p = 1$ のとき，$y = f(x)$ のグラフをかけ。

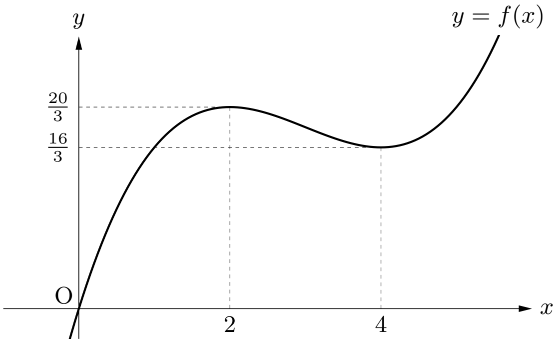
(2) $f'(x) = 0$ となる x の値を p を用いて表せ。

(3) $x \geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値を求めよ。

(1) $p = 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$ であり
$f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ から増減表は

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{20}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\nearrow$

グラフは下図



◀ 3 次関数のグラフを描く ⟶ 増減表を作成
極大，極小となる部分があれば明示，各切片を（簡単に求まるのなら）明示して滑らかな点対称な曲線を描く

(2) $f'(x) = x^2 - 6x + (9 - p^2) = (x - (3+p))(x - (3-p))$ から
$f'(x) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x = 3 - p,\ 3 + p}$

◀ 文字係数 p を含む 2 次方程式を解く。解は p を含む

(3) $x \geqq 0$ での増減表で考える。$\alpha = 3 - p$，$\beta = 3 + p$ とすると
$p \geqq 0$ から $\alpha \leqq \beta$ である。

◀ $x \geqq 0$ なので，いくつかの場合分けが必要となる。

- $p = 0$ のとき $\alpha = \beta$ から

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$

- $p > 0$ のとき $\alpha < \beta$ であり
  - ◦ $\beta \leqq 0$ となることはない

○ $\alpha \leqq 0 < \beta$ すなわち $p \geqq 3$ のとき

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

○ $0 < \alpha$ すなわち $0 < p < 3$ のとき

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

ここで $f(0) = 0$ と $f(\beta)$ を比較する。

$$
\begin{aligned}
f(\beta) &= \frac{1}{3}\beta^3 - 3\beta^2 + \left(9 - p^2\right)\beta \\
&= \frac{1}{3}\beta\left\{\beta^2 - 9\beta + 3\left(9 - p^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3}(3+p)\left\{(3+p)^2 - 9(3+p) + 3\left(9 - p^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3}(3+p)\left\{(3+p)^2 - 9(3+p) + 3(3+p)(3-p)\right\} \\
&= \frac{1}{3}(3+p)^2\{(3+p) - 9 + 3(3-p)\} \\
&= -\frac{1}{3}(3+p)^2(2p-3)
\end{aligned}
$$

$-\dfrac{1}{3}(3+p)^2 < 0$ であるから

$0 < p < \dfrac{3}{2}$ のとき $0 < f(\beta)$

$p = \dfrac{3}{2}$ のとき $0 = f(\beta)$

$\dfrac{3}{2} < p < 3$ のとき $0 > f(\beta)$

以上まとめると

$\boldsymbol{0 \leqq p < \dfrac{3}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{p = \dfrac{3}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{9}{2}}$

$\boldsymbol{\dfrac{3}{2} < p}$ **のとき** $\boldsymbol{x = 3 + p}$