1 次の問に答えよ。

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式

$$2\cos 2\theta + 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2 - \sqrt{3} \leqq 0$$

を解け。

(2) $X = \log_2 x$ とおくとき，$\log_4 x$ を X で表し，等式

$$4^{\log_2(\log_2 x)} + 4^{\log_4(\log_4 x)} - \frac{1}{2} = 0$$

をみたす x の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = a$，$\cos\theta = b$ とし，加法定理を用いて

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2b^2 - 1$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\theta\cos\frac{\pi}{6} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{3}\,b\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \quad \text{から}\end{aligned}$$

与えられた不等式は

$$\begin{aligned}2(2b^2 - 1) + 2\left(-a + \sqrt{3}\,b\right) + 2(a - b) + 2 - \sqrt{3} &\leqq 0\\ 4b^2 + \left(2\sqrt{3} - 2\right)b - \sqrt{3} &\leqq 0\\ \left(2b + \sqrt{3}\right)(2b - 1) &\leqq 0\end{aligned}$$

$-1 \leqq b \leqq 1$ から $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

となり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi}$$

(2) 底の変換を用いて

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \boldsymbol{\frac{X}{2}}$$

次に

$$4^{\log_2(\log_2 x)} = \left(2^2\right)^{\log_2 X} = \left(2^{\log_2 X}\right)^2 = X^2$$

$$4^{\log_4(\log_4 x)} = 4^{\log_4 \frac{X}{2}} = \frac{X}{2}$$

を用いると，与えられた方程式を書き直し

$$X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{を解く。}$$

$2X^2 + X - 1 = 0$

$(X+1)(2X-1) = 0$

$X = -1,\ \dfrac{1}{2}$　すなわち $\log_2 x = -1,\ \dfrac{1}{2}$ から

$x = 2^{-1},\ 2^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\ \boldsymbol{\sqrt{2}}$

2 O を原点とする空間に 4 点 A$(1,\ 2,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ -1)$，C$(0,\ -1,\ 1)$，D$(-1,\ -1,\ -1)$ をとり，3 点 A，B，C を通る平面を α とする。次の問に答えよ。

(1) 点 D が α 上にないことを示せ。

(2) 点 H を平面 α 上の点とする。点 DH が平面 α に垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ において，線分 DH を $3:2$ に外分する点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 0,\ -1)-(1,\ 2,\ 0)=(-2,\ -2,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)-(1,\ 2,\ 0)=(-1,\ -3,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ -1,\ -1)-(1,\ 2,\ 0)=(-2,\ -3,\ -1)$

D が α 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\begin{aligned}(-2,\ -3,\ -1)&=s(-2,\ -2,\ -1)+t(-1,\ -3,\ 1)\\&=(-2s-t,\ -2s-3t,\ -s+t)\ \cdots①\end{aligned}$$

を満たす実数の組 s，t が存在する。① は

$$\begin{cases}-2s-t=-2\ \cdots②\\-2s-3t=-3\ \cdots③\\-s+t=-1\ \cdots④\end{cases}$$ とでき

②，④ から $(s,t)=(1,0)$ となり，これは ③ を満たさない。

したがって ① を満たす実数の組 (s,t) は存在しないので，D が α 上にないことが示された。

(2) (1) から α 上の点 H は適当な実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とでき

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots⑤$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp$（平面 α）となる必要十分条件は

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\ \cdots⑥$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\ \cdots⑦$ であり

⑥ は

$$(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$s(4+4+1)+t(2+6-1)-(4+6+1)=0$$

$$9s+7t-11=0\ \cdots⑧$$

⑦ は

$$(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$s(2+6-1)+t(1+9+1)-(2+9-1)=0$$

$$7s+11t-10=0\ \cdots⑨$$

⑧, ⑨ を解いて $(s,\ t) = \left(\dfrac{51}{50},\ \dfrac{13}{50}\right)$

⑤ に代入し $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \left(-\dfrac{3}{10},\ \dfrac{9}{50},\ \dfrac{6}{25}\right)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 3\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\ &= (-1,\ -1,\ -1) + 3\left(-\frac{3}{10},\ \frac{9}{50},\ \frac{6}{25}\right)\\ &= \boldsymbol{\left(-\frac{19}{10},\ -\frac{23}{50},\ -\frac{7}{25}\right)}\end{aligned}$$

3 $a>0$，$b>0$ とし，放物線 C_1 と C_2 を

$$C_1 : y=\frac{1}{2(a+b)}x^2+\frac{a-b}{2}$$

$$C_2 : y=\frac{1}{2b}x^2+\frac{b}{2}$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) 放物線 C_1 と C_2 が共有点をもつための必要十分条件を a と b を用いて表せ。また，そのときの共有点の座標を a と b を用いて表せ。

(2) 放物線 C_2 の接線のうち原点を通り傾きが正の接線 ℓ の方程式を求めよ。また，そのときの接点 P の座標を b を用いて表せ。

(3) $b=1$ とする。放物線 C_1 が (2) で求めた接点 P を通るとする。このとき，a の値を求め，放物線 C_1 と (2) で求めた直線 ℓ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) y を消去した

$$\frac{1}{2(a+b)}x^2+\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2b}x^2+\frac{b}{2}\quad\cdots①$$ を考え

辺々 $2(a+b)b\ (>0)$ をかけて

$$bx^2+(a-b)(a+b)b=(a+b)x^2+(a+b)b^2$$

$$ax^2=(a+b)b\{(a-b)-b\}=(a+b)b(a-2b)$$

$$x^2=\frac{(a+b)b(a-2b)}{a}\quad\cdots②\qquad(\because\ a\fallingdotseq 0)$$

求める必要十分条件は ② が実数解をもつことなので

（② の右辺）$\geqq 0$

となることである。ここで $a>0$，$b>0$，$a+b>0$ から

求める必要条件は $\boldsymbol{a-2b\geqq 0}$ $\cdots$③ となる。

③ のとき共有点の x 座標は $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a+b)b(a-2b)}{a}}$

y 座標は C_2 上の点であることを用いて

$$y=\frac{1}{2b}\cdot\frac{(a+b)b(a-2b)}{a}+\frac{b}{2}$$

$$=\frac{(a+b)(a-2b)+ab}{2a}$$

$$=\frac{a^2-2b^2}{2a}$$

したがって求める共有点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\sqrt{\frac{(a+b)b(a-2b)}{a}},\ \frac{a^2-2b^2}{2a}\right)}$$

(2) C_2 について $y'=\dfrac{1}{b}x$ であり，$\left(t,\ \dfrac{1}{2b}t^2+\dfrac{b}{2}\right)$ における接線の

方程式は

$$y = \frac{1}{b}t\,(x-t) + \frac{1}{2b}t^2 + \frac{b}{2}$$
$$= \frac{1}{b}tx - \frac{1}{2b}t^2 + \frac{b}{2} \quad \cdots ④$$

④ が $(\,0\,,\,0\,)$ を通るとき

$$-\frac{1}{2b}t^2 + \frac{b}{2} = 0 \quad \text{を解く}$$

$$t^2 - b^2 = 0 \quad \text{から}\ t = \pm b$$

$y' > 0$ となるのは $b > 0$ から $t = b$ のときであり，④ に代入し

ℓ の方程式は $\boldsymbol{y = x}$ であり，接点の座標は $\boldsymbol{(\,b\,,\,b\,)}$

(3) $b = 1$ としたとき，C_1 の方程式は $y = \dfrac{1}{2\,(a+1)}x^2 + \dfrac{a-1}{2}$

これが $\mathrm{P}\,(\,1\,,\,1\,)$ を通るのは

$$1 = \frac{1}{2\,(a+1)} + \frac{a-1}{2} \quad \text{を解く}$$

$$2\,(a+1) = 1 + (a-1)(a+1)$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0$$

$a > 0$ から $\boldsymbol{a = 1 + \sqrt{3}}$

このとき C_1 の方程式は $y = \dfrac{1}{2\,(2+\sqrt{3})}x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C_1 と ℓ の共有点の x 座標は

$$\frac{1}{2\,(2+\sqrt{3})}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = x \quad \text{を解く}$$

$$x^2 - 2\left(2+\sqrt{3}\right)x + \sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$(x-1)\left(x - \left(3+2\sqrt{3}\right)\right) = 0$$

$$x = 1,\ 3+2\sqrt{3}$$

$\alpha = 1$，$\beta = 3+2\sqrt{3}$ とすると，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ では C_1 は ℓ の下方にあるので，求める面積を S とすると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{x - \left(\frac{1}{2\,(2+\sqrt{3})}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} dx$$
$$= -\frac{1}{2\,(2+\sqrt{3})}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{1}{12\,(2+\sqrt{3})}\cdot(\beta-\alpha)^3$$

ここで

$$\frac{1}{12\,(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{12\,(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{12}$$

$$(\beta-\alpha)^3 = \left(2+2\sqrt{3}\right)^3 = 8\left(1+\sqrt{3}\right)^3 = 16\left(5+3\sqrt{3}\right)$$

したがって

$$S = \frac{2-\sqrt{3}}{12} \cdot 16\left(5+3\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}}$$