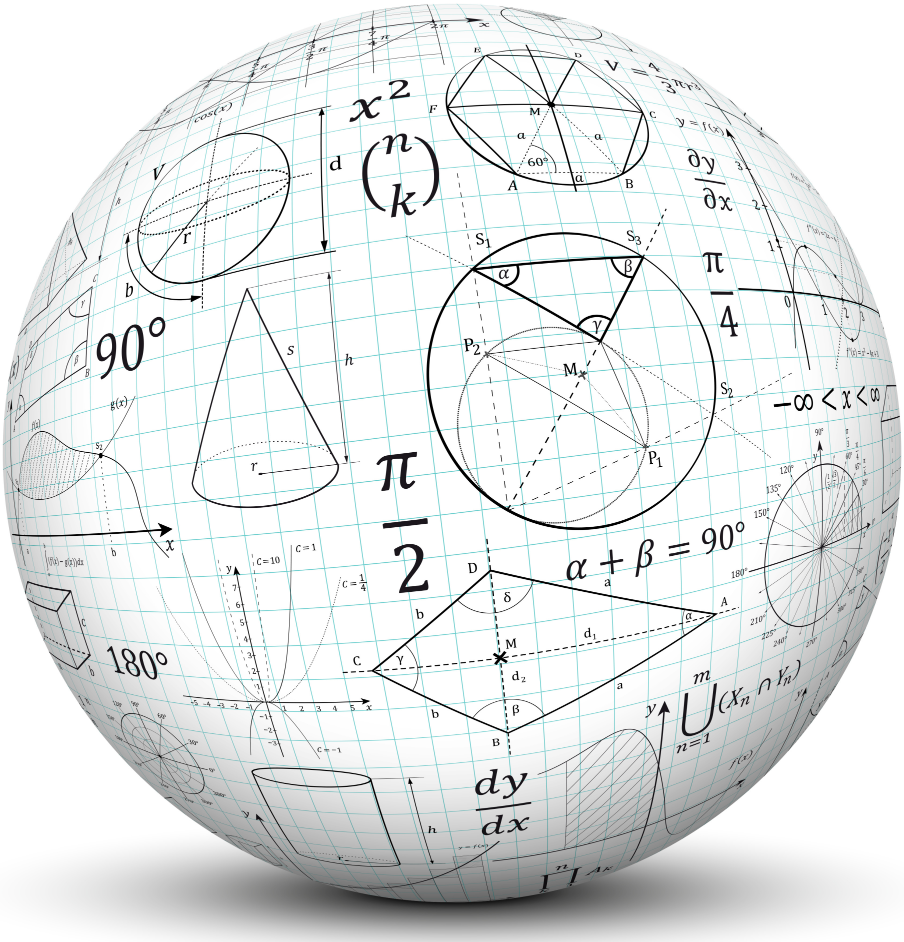
令和4年度
高校第3学年
二次・私大対策演習問題



- 昨年度入試の標準問題を掲載しました。
- 1日3題を目安に，解答の示し方と知っておきたい知識を解説します。
- 講習では解答時間は設けないので，各自予習をして臨んでください。

1 方程式

$$(2m+n)(n+1)=132$$

を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。〔富山〕

2 a を正の実数とし，xy 平面上の放物線 $C : y=x^2$ の上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ で C に接する接線を ℓ，点 A を通り ℓ に直交する直線を ℓ' とする。また，直線 ℓ' と放物線 C との交点で A と異なる点を $\mathrm{P}(s, s^2)$ とする。

(1) 直線 ℓ' の方程式を求め，a を用いて s を表せ。

(2) 放物線 C と x 軸，および直線 $x=s$ で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小になる a の値と，$S(a)$ の最小値を求めよ。〔東北〕

3 空間に 4 点 O，A，B，C があり

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}$$

を満たしているとする。三角形 ABC の外接円の面積を求めよ。〔小樽商科〕

4 円 $x^2+y^2-10x-2ay+a^2+21=0\ (0<a<2)\ \cdots$① と直線 $y=2x+1\ \cdots$② がある。円 ① の中心を C とし，点 C と直線 ② の距離が $2\sqrt{5}$ であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) a の値を定め，円 ① の中心 C の座標と半径を求めなさい。

(2) 直線 ② に関して円 ① と対称な円の中心 D の座標を求めなさい。

(3) 点 $\mathrm{A}(3, -3)$ とする。点 P が直線 ② の上を動き，点 Q が ① の円周上を動くとき，2 つの線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めなさい。〔長崎県立〕

5 $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，θ に関する方程式

$$2\cos\theta-2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\frac{\theta}{2}+2-\sqrt{3}=0$$

を解け。〔宮城教育〕

6 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15$ および

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{5} - 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす数列とする。

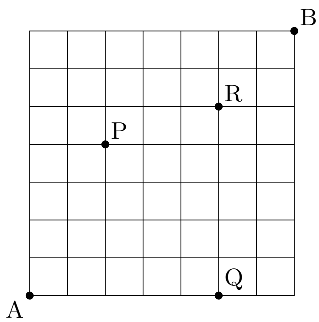
(1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ。 〔北海道〕

7 方程式 $\log_2|x^2 - 3x + 2| + \log_2|x^2 - 5x + 6| = 2\log_2(x - 2)$ を解け。 〔山梨〕

8 ある公園には右の図の線で示されているような歩道が造られている。また，この公園内には図の P，Q，R の 3 地点だけに水飲み場が設置されている。このとき次の問いに答えよ。



(1) A 地点から歩道を通って B 地点に至る最短の経路のうち，P 地点の水飲み場を通るものは何通りあるか。

(2) A 地点から歩道を通って B 地点に至る最短の経路のうち，水飲み場を 1 回以上通るものは通るものは何通りあるか。 〔岩手〕

9 平面上の 2 点 A$(-2, -2)$，B$(1, -4)$ と円 $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$ 上の点 P を頂点とする △ABP を考える。P が円周上を動いたとき △ABP の重心 G の軌跡を求めよ。 〔三重〕

10 2 次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ。 〔愛媛〕

11 不等式 $8^x - 4^{x+1} + 2^x + 6 > 0$ を解け。 〔会津〕

12 次の方程式を複素数の範囲で解きなさい。

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 9) + 12 = 0$$

〔福島〕

13 座標空間の原点を O とし，3 点 A$(2,\ 2,\ -2)$，B$(2,\ -2,\ 2)$，C$(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D，E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。 〔新潟〕

14 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ について，次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ について，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2) 曲線 $C\ :\ y = f(x)$ について，傾きが 1 である接線の方程式をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた接線のうち，y 軸との交点の y 座標が最大のものを ℓ とする。C と ℓ とで囲まれた部分の面積を求めよ。 〔茨城〕

15 不等式 $\sin\theta - \dfrac{\tan\theta}{2} > 0$ を解きなさい。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。 〔福島〕

16 座標平面上の放物線 $y = -x^2 + (a-4)x + 2a - 8$ を C とし，点 $(-2,\ 0)$ を通る直線 L_1 と放物線 C が点 P で接するとする。ただし，点 P の x 座標は 0 以上である。$a \fallingdotseq 4$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 L_1 の方程式を a を用いて表せ。

(3) 点 P を通り，直線 L_1 に垂直な直線 L_2 の方程式を a を用いて表せ。

(4) 放物線 C と直線 L_2 の交点で，点 P と異なる点を Q とするとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(5) $a > 4$ のとき，放物線 C と直線 L_2 に囲まれた図形の面積を a を用いて表せ。 〔山形〕

17 座標平面上に原点 O と 2 点 A$(1, 0)$，B$\left(-1, \sqrt{3}\right)$ がある。線分 AB を 1:2 に内分する点を C とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

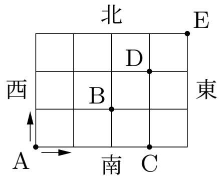
(1) $\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の成分表示をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 P，Q，R があり，それらの位置ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = u\overrightarrow{e_3}$ であるとする。ただし s，t，u は正の実数である。この 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるとき，u を s と t を用いて表せ。

(3) (2) の 3 点 P，Q，R について，点 R が線分 PQ の中点であるとき，t，u をそれぞれ s で表せ。

〔山梨〕

18 右図のような正方形の区画から構成される道路があり，点 A を出発地点とする。「北」,「東」,「その場に留まる」と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚を引き,「北」を引いたら北に向かって 1 区画進み,「東」を引いたら東に向かって 1 区画進み,「その場に留まる」を引いたらその場に留まる。ただし，カードの指示通り移動できない場合にはその場に留まるとする。その後，引いたカードはもとに戻す。この操作を繰り返すとき，次の問に答えよ。



(1) 3 回操作を繰り返したとき，点 B にいる確率を求めよ。

(2) 5 回操作を繰り返したとき，点 C を通って点 D にいる確率を求めよ。

(3) 5 回操作を繰り返したとき，点 B を通らずに点 D にいる確率を求めよ。

(4) 6 回操作を繰り返したとき，点 D にいる確率を求めよ。

(5) 7 回操作を繰り返したとき，点 B，C，D のうち 2 つを通って点 E にいる確率を求めよ。

〔山形〕

19 放物線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ を C_1 とする。点 P$\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における C_1 の接線と P で垂直に交わる直線を ℓ とする。また，ℓ と x 軸との交点を中心とし，点 P を通る円を C_2 とおく。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 円 C_2 の中心と半径を求めよ。

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

〔北海道教育〕

20 次の問いに答えよ。

(1) 実数を係数とする多項式 $P(x)$ に対して，$P(i)=0$ ならば $P(x)$ は x^2+1 で割り切れることを示せ。ただし i は虚数単位である。

(2) 実数を係数とする多項式 $P(x)$，$Q(x)$ の積 $P(x)Q(x)$ が x^2+1 で割り切れるならば，$P(x)$ と $Q(x)$ の少なくとも一方は x^2+1 で割り切れることを示せ。 〔宮城教育〕

21 a を $0<a<1$ をみたす実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{1}{6}\log_a(2a)+\log_a\sqrt[3]{7}-\dfrac{1}{2}\log_a\sqrt[3]{98}$ の値を求めなさい。

(2) 不等式 $a^{2x+1}+a \leqq a^{x-1}+a^{x+3}$ をみたす整数 x をすべて求めなさい。

(3) 不等式 $3\log_{a^3}(2x+4) \leqq 2\log_a(4-x)-\log_a 4$ をみたす整数 x をすべて求めなさい。

〔東京都立〕

22 座標空間に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(4,\ -1,\ 2)$，B$(2,\ 4,\ -4)$，C$(-2,\ 4,\ 4)$ がある。線分 BC を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $2:1$ に内分する点を E とする。次の問いに答えなさい。

(1) 線分 AD と線分 BE の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表しなさい。

(2) 2 点 A，D を通る直線に，点 O から垂線を下ろし，直線との交点を H とする。点 H の座標を求めなさい。 〔秋田〕

23 A，B の二人がそれぞれ 1 個のさいころを 3 回投げ，3 つの出た目を使って 3 桁の自然数をつくる。A は 1 回目に出た目を百の位，2 回目に出た目を十の位，3 回目に出た目を一の位の数として 3 桁の自然数をつくる。B は出た 3 つの目を百の位，十の位，一の位のいずれかとする 3 桁の自然数のうち最大となる数をつくる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) A のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい。

(2) B のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい。

(3) B の 1 回目に出た目が 2 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が 226 より小さくなる確率を求めなさい。

(4) A の 1 回目と 2 回目に出た目がそれぞれ 5 と 4 であり，B の 1 回目に出た目が 4 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が A のつくる 3 桁の自然数より大きくなる確率を求めなさい。 〔福島〕

24 xy 平面上に中心 $(-3, -2)$，半径 $\sqrt{3}$ の円 C と，直線 $\ell: y = tx + 1$ がある。t は実数とする。C と ℓ が異なる 2 点 A，B で交わっており，A，B の x 座標をそれぞれ a，b $(a < b)$ とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $t = \sqrt{2}$ であるとき，C の中心と ℓ の距離を求めなさい。

(2) t のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) 弦 AB の長さが最大となる t の値を求めなさい。

(4) a，b を t を用いてそれぞれ表しなさい。

(5) 弦 AB の長さが 2 となる t の値を求めなさい。〔岩手県立〕

25 各辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。線分 AB を 3 : 1 に外分する点を D とし，線分 AC を 2 : 1 に外分する点を E とするとき，以下の問に答えよ。ただし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

で表す。

(1) 点 P は平面 ODE 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ がこの平面に垂直になるとする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) (1) で定めた点 P に対して，線分 AP と平面 OBC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\triangle$OBC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と (2) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

〔宮城教育〕

26 k を実数とし，整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。〔九州〕

27 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2$ に対し，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(\,p\,,\,f\,(p)\,)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(3) 点 $(\,4\,,\,k\,)$ から曲線 C 上の異なる 3 点それぞれに接線が引けるとする。このときの定数 k の値の範囲を求めよ。 〔香川〕

28 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 3a_n + n + 1 \ \ (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2 および a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) a_n および S_n をそれぞれ n の式で表せ。 〔岩手〕

29 $t = \sin x + \cos x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin 2x$ を t の式で表せ。

(3) 関数 $y = \sin 2x + a\,(\sin x + \cos x) + \dfrac{5}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最小値が 0 であるとき，定数 a の値を求めよ。 〔岩手〕

30 三角形 ABC は AB = 6，BC = 10，CA = 9 を満たすとする。角 BAC の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を表しなさい。

(2) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めなさい。

(3) 三角形 ABC の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を表しなさい。

(4) $|\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}\,|$ を求めなさい。 〔福島〕

31

(1)　$x^2-2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とする。$\alpha^4+\beta^4$ の値を求めよ。

(2)　x^{2022} を x^2-2x+4 で割った余りを求めよ。　〔鳥取〕

32　$m^2-mn-2n^2=22$ を満たす自然数の組 (m,n) をすべて求めよ。　〔愛媛〕

33　z^3 と z^2+2iz がともに実数であるような 0 でない複素数 z を求めよ。　〔三重〕

34　a，b を正の実数とし，xy 平面上の直線 ℓ : $ax+by-2=0$ を考える。

(1)　直線 ℓ と原点の距離が 2 以上であり，直線 ℓ と直線 $x=1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 (a,b) のとり得る範囲 D を求め，ab 平面上に図示せよ。

(2)　点 (a,b) が (1) で求めた範囲 D を動くとする。このとき，$3a+2b$ を最大にする a，b の値と，$3a+2b$ の最大値を求めよ。　〔東北〕

35　群に分けられた数列 $\{a_n\}$

$$1,1\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\left|\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right|\frac{1}{16},\cdots$$

に対し，次の問いに答えよ。ただし，第 k 群について各項は 2^{-k+1} であり，項数は $k+2^{k-1}$ である。

(1)　a_{500} を求めよ。

(2)　第 k 群の項の総和を S_k とする。S_k を k で表し，$\sum\limits_{i=1}^{k} S_i$ を求めよ。

(3)　a_1 から a_{2022} までの和を求めよ。　〔名古屋市立〕

36　a，b を正の実数とする。$a \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{3-\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 b}$ が成り立つ x の範囲を求めよ。　〔三重〕

37 次の問いに答えよ。ただし，必要があれば次の命題 (A)，(B) が成り立つことを用いてよい。

(A) x，y を有理数とする。このとき $x+y$，$x-y$，xy は有理数である。さらに $y \neq 0$ ならば，$\dfrac{x}{y}$ は有理数である。

(B) $\sqrt{2}$ は無理数である。

(1) r を正の実数とするとき，$0 < \sqrt{r^2+1} - r < 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) a，b を有理数とし，$a \neq b$ とする。さらに，$c = (b-a)\left(\sqrt{2}-1\right)$ とする。このとき c は無理数であることを，背理法を用いて証明せよ。

(3) a，b を有理数とし，$a < b$ とする。このとき，a と b の間には無理数が必ず存在することを証明せよ。

〔富山県立〕

38 xy 平面上の放物線 C : $y = 4 - x^2$ に対し，C 上に 2 点 $\mathrm{P}(-t, 4-t^2)$，$\mathrm{Q}(t, 4-t^2)$ をとる。ただし，$0 < t < 2$ とする。また，C と x 軸との交点で x 座標が負であるものを A とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 APQ の面積 S が最大となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

(2) 線分 PQ と放物線 C で囲まれた部分の面積を T_1 とし，線分 AP と C で囲まれた部分の面積を T_2 とする。$T = T_1 + 2T_2$ が最小となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

〔山梨〕

39 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = na_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

〔新潟〕

40 a，b を実数の定数とする。x の多項式 $P(x)$，$Q(x)$ を，

$$P(x)=x^5+ax^3+bx,\quad Q(x)=x^3-4x^2-4x+16$$

とする。$P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。〔茨城(一部改)〕

41 $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$$\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$$

〔長崎〕

42 四面体 OABC において，3 点 O，A，B を通る平面を α とし，点 C から α へ引いた垂線と α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

であるとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。〔会津(一部改)〕

43 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじを，A と B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし，引いたくじはもとに戻さない。この操作をくじがなくなるまで繰り返すとき，以下の問いに答えよ。

(1) A が 3 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(2) A が 2 本，B が 1 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(3) A が先に 2 本の当たりくじを引き，その後に B が 1 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(4) 最初に当たりくじを引くのが B である確率を求めよ。

(5) B が少なくとも 1 本の当たりくじを引いたとき，最初に当たりくじを引いたのが B であった確率を求めよ。〔会津(一部改)〕

44 18^{50} は何桁の整数か。また，$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{40}$ を小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。〔茨城〕

45 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x-1$ とする。$t \geqq -3$ とし，$S(t)=\displaystyle\int_{-3}^{t}|f(x)|\,dx$ とする。次の各問いに答えよ。

(1) 2 次不等式 $f(x)<0$ を解け。

(2) $S(-2)$，$S(1)$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) t の関数 $S(t)$ を求めよ。〔埼玉〕

46 m は実数とする。x の 2 次方程式

$$x^2-(m+2)\,x+2m+4=0$$

の $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき，m の値の範囲を求めよ。ただし，重解の場合，実数解の個数は 1 つと数える。〔信州〕

47 $a>0$ とする。xy 平面上に放物線 H : $y=x^2$ と H 上の点 $\mathrm{A}\,(a,\,a^2)$ を考える。点 A を接点とする H の接線を ℓ で表す。また，点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線を n で表す。以下の問に答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 n の方程式を求めよ。

(3) 直線 n と放物線 H の点 A とは異なる共有点の座標を a を用いて表せ。

(4) 放物線 H と直線 n で囲まれる部分の面積 S を a を用いて表せ。

(5) a が，$a>0$ の範囲を動くとき，(4) の面積 S の最小値とそのときの a の値を求めよ。〔岐阜〕

48 次の方程式の表す図形を xy 平面上に図示せよ。

$$\log_2 x=\log_4(x+y+2)$$

〔弘前〕

49 3 桁の数に対して，さいころを 1 回投げたとき，出る目に応じて次の (A) から (D) のいずれかの操作を行う。

(A) 1 の目が出たとき，一の位の数字と十の位の数字を入れ換える。

(B) 2 の目が出たとき，一の位の数字と百の位の数字を入れ換える。

(C) 3 の目が出たとき，十の位の数字と百の位の数字を入れ換える。

(D) 4 または 5 または 6 の目が出たとき，何もしない。

最初の 3 桁の数字を 123 とし，さいころを続けて n 回投げたとき，3 桁の数が 123 である確率を p_n，231 と 312 のいずれかである確率を q_n，213 と 321 と 132 のいずれかである確率を r_n とする。次の問に答えよ。

(1) p_1，q_1，r_1，p_2，q_2，r_2 を求めよ。

(2) 次の等式を満たす定数 a, b, c, d, e, f, g を一組求めよ。

$$p_{n+1} = a\,p_n + b\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$q_{n+1} = c\,q_n + d\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$r_{n+1} = e\,p_n + f\,q_n + g\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) r_n を求めよ。

(4) p_n，q_n を求めよ。 〔埼玉〕

50 不等式 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \leqq 0$ の表す領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 領域 D を解答用紙の座標平面上に図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$2x + 1$ の最大値を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$x^2 + y^2$ の最大値を求めよ。

(4) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$\dfrac{y}{x}$ の最小値を求めよ。 〔豊橋技術科学〕

51 数列 $\{a_n\}$ を初項が 12 で公差 8 の等差数列とする。また，次の条件で定められる数列 $\{b_n\}$ がある。

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

(5) 数列 $\{c_n\}$ を，次のように定める。各自然数 m に対して，(4) の和 S_n が

$$\frac{1}{2} - S_n < \frac{1}{10^m}$$

となるような最小の自然数 n を c_m とする。このとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k$ を求めよ。〔岐阜〕

52 不等式

$$1 \leqq 2^y \leqq x \leqq 2022$$

を満たす整数 x，y の組の個数を求めよ。〔愛知教育〕

53 3 つの袋 A，B，C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている，A，B，C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき，取り出したカードの番号を，X，Y，Z $(X \leqq Y \leqq Z)$ とする。たとえば A，B，C の袋からそれぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X = 16$，$Y = 24$，$Z = 24$ である。

(1) Z が 10 以下となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(2) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(3) Y が 12 で，X，Y，Z が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

〔群馬〕

54 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) a_{11} を少数で表したとき，初めて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か答えよ。もし必要なら，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使用してもよい。 〔福井〕

55 平面上の平行四辺形 OACB において，辺 AC の中点を M とする。辺 OA の長さが 8，辺 OB の長さが 6，線分 BM の長さが 7，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(3) 平行四辺形 OACB の面積 S を求めよ。

(4) 平行四辺形 OACB の周および内部にある点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 60$$

を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲の面積 T を求めよ。 〔宇都宮〕

56 a を実数とする。$y = 7 - \sin^2 x - 2a \cos x$ の最小値が a と等しくなるような a の値をすべて求めよ。 〔三重〕

57 $a = 18^{50}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\log_{10} \sqrt{18}$，および $\log_{10} 5$ の値を求めよ。

(2) a の桁数，および a の最高位の数字を求めよ。

(3) a を 5 進法で表したときの桁数，および最高位の数字を求めよ。 〔徳島〕

58 $f(x) = -6 - \displaystyle\int_0^1 (6xt - 4)\, f(t)\, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 〔三重〕

59 関数 $f(x)=-x^3+3x^2+x-3$ について，次の問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 であるものを，すべて求めよ。

(3) (2) で求めた接線のうち，y 切片が正のものを ℓ とする。x 軸，y 軸，$y=f(x)$ および ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ。 〔金沢〕

60 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_1=1,\quad a_nb_{n+1}=b_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たしている。また，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 2 以上の整数 n に対して，b_{n+1} を b_n，b_{n-1} を用いて表せ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 〔和歌山〕

61 平面上の $\triangle$OAB で，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$ となるものを考える。点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA の交点を H とする。また t を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ となる点 P をとる。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) H は辺 OA の中点であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

以下において，P は $\triangle$OAB の外接円の中心であるとする。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=x$ とするとき，t を x を用いて表せ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ の値を求めよ。 〔金沢〕

62 数直線上の原点 O を出発して，1 から 6 が書かれた 1 個のサイコロを投げるたびに，3 の倍数の目が出たら 2，それ以外の目が出たら 1 だけ，正の方向へ進むものとする。このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n とする。n は自然数とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) p_1，p_2，p_3 を求めなさい。

(2) p_{n+2} を p_{n+1}，p_n で表しなさい。

(3) $p_{n+1} - p_n$ を n で表しなさい。

(4) p_n を n で表し，$0.752 < p_n < 0.76$ を満たす点 n を求めなさい。 〔長崎県立〕

63 m は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を初項から順に，第 m 群が連続した $12m - 6$ 個の項からなるように群に分ける。第 m 群の最後の項は数列 $\{a_n\}$ の第 t_m 項であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 第 2 群の最初の項と最後の項は，数列 $\{a_n\}$ のそれぞれ何番目の項か。

(2) t_m を m を用いて表せ。

(3) a_{2022} が第 k 群に含まれるとき，k を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を初項が整数 c で公差が 1 の等差数列とするとき，

$$\sum_{n=1}^{t_m} a_n = 48$$

を満たす c と m を求めよ。 〔金沢〕