63 m は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を初項から順に，第 m 群が連続した $12m-6$ 個の項からなるように群に分ける。第 m 群の最後の項は数列 $\{a_n\}$ の第 t_m 項であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 第 2 群の最初の項と最後の項は，数列 $\{a_n\}$ のそれぞれ何番目の項か。

(2) t_m を m を用いて表せ。

(3) a_{2022} が第 k 群に含まれるとき，k を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を初項が整数 c で公差が 1 の等差数列とするとき，

$$\sum_{n=1}^{t_m} a_n = 48$$

を満たす c と m を求めよ。〔金沢〕

(1) 第 1 群には 6 個，第 2 群には 18 個の項が存在するので，第 2 群の最初の項は $6+1=\mathbf{7}$ 番目，最後の項は $6+18=\mathbf{24}$ 番目の項である。

◀ 群数列の各群の初項と末項までの項数を把握する

(2)

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^{m}(12k-6) \\ &= \frac{1}{2}m\{6+(12m-6)\} \\ &= \boldsymbol{6m^2} \end{aligned}$$

◀ $\sum$（1 次式）は等差数列の和として計算できる

(3) $t_1=6$ から $k \geqq 2$ であり，a_{2022} が第 k 群に属するとき

$t_{k-1} < 2022 \leqq t_k$ が成り立つ。

$6(k-1)^2 < 2022 \leqq 6k^2$ すなわち $(k-1)^2 < 337 \leqq k^2$

ここで $18^2=324$，$19^2=361$ から a_{2022} は第 **19** 群に属する。

◀ a_{2022} が第 k 群に含まれる条件を，不等式で表す。
整数解なので，適当(適切)な値を具体的に計算して示す。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{t_m} a_n$ は，初項 $a_1=c$，公差 1，項数 $t_m=6m^2$ の等差数列の和を表すので，条件式は

$$\frac{1}{2}\cdot 6m^2\{2c+(6m^2-1)\cdot 1\}=48$$

両辺 3 で割り

$$m^2(2c+6m^2-1)=16 \cdots ①$$

◀ おなじみの整数問題に帰着する

左辺に m^2 の因数があり，自然数 m は $m=1, 2, 4$ に限る。

- $m=1$ のとき ① は

  $2c+6-1=16$

  これを満たす整数 c は存在しない。

- $m=2$ のとき ① は

  $2c+23=4$

  これを満たす整数 c は存在しない。

- $m=4$ のとき ① は

$$2c+95=1$$

これを満たす整数 c は $c=-47$

以上から $\boldsymbol{(c,\ m)=(-47,\ 4)}$