61 平面上の △OAB で，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1$ となるものを考える。点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA の交点を H とする。また t を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ となる点 P をとる。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) H は辺 OA の中点であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

以下において，P は △OAB の外接円の中心であるとする。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = x$ とするとき，t を x を用いて表せ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ の値を求めよ。 〔金沢〕

(1) 点 H が直線 OA 上の点であるとき，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すことができる。

◀「$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ が成り立つ」という証明は数学的には間違い。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} = 0$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$$

$$k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \qquad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$2k - 1 = 0 \quad \text{から} \quad k = \frac{1}{2}$$

したがって H は線分 OA の中点であることが示された。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ は

◀ 基点を O とする位置ベクトルで表す

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \quad \text{から}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b} = \boldsymbol{\frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}}$$

(3) 線分 OB の中点を M とする。P が △OAB の外接円の中心であるための条件は OB ⊥ PM となることである。

◀ 外心はそれぞれの辺の垂直二等分線の交点

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PM}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = 0$$

$$\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{b} \cdot \vec{a} - (1-t)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}t - (1-t)x = 0$$

$$x - t - 2(1-t)x = 0$$

$$(2x-1)t - x = 0$$

$$(2x-1)t = x$$

◀ 割り算するとき 0 で割り算しないか確認

$x = \frac{1}{2}$ のとき，この式は成り立たないので

$x \fallingdotseq \frac{1}{2}$ となり $\boldsymbol{t = \frac{x}{2x-1}}$

(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \sqrt{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ から

$$\frac{1}{4}t^2\left|\vec{a}\right|^2 + t(1-t)\,\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)^2\left|\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{b}\right|^2$$

$$\frac{1}{2}t^2 + t(1-t) + (1-t)^2 x = 2x$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 + \frac{x}{2x-1}\left(1-\frac{x}{2x-1}\right) + \left(1-\frac{x}{2x-1}\right)^2 x = 2x$$

辺々 $2(2x-1)^2\ (\neq 0)$ をかけて

$$x^2 + 2x(2x-1-x) + 2(2x-1-x)^2 x = 4x(2x-1)^2$$

$$x^2 + 2x(x-1) + 2(x-1)^2 x = 4x(2x-1)^2$$

$$14x^3 - 15x^2 + 4x = 0$$

$$x(14x^2 - 15x + 4) = 0$$

$$x(2x-1)(7x-4) = 0$$

$x=0$ とすると $t=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \vec{0}$ となり，B と P が一致することになり適さない。したがって $x \neq 0$ および $x \neq \frac{1}{2}$ から $x = \frac{4}{7}$ であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| > 0$ から $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{\frac{4}{7}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{7}}}$

◀ 条件を t，x を用いて表す。最終的に 1 文字の条件式になる。

62 数直線上の原点 O を出発して，1 から 6 が書かれた 1 個のサイコロを投げるたびに，3 の倍数の目が出たら 2，それ以外の目が出たら 1 だけ，正の方向へ進むものとする。このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n とする。n は自然数とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) p_1，p_2，p_3 を求めなさい。

(2) p_{n+2} を p_{n+1}，p_n で表しなさい。

(3) $p_{n+1} - p_n$ を n で表しなさい。

(4) p_n を n で表し，$0.752 < p_n < 0.76$ を満たす点 n を求めなさい。〔長崎県立〕

説明のため 3 の倍数が出る事象を A，それ以外の事象を B とし，A となる確率は $\frac{1}{3}$，B となる確率は $\frac{2}{3}$ とする。

(1) p_1 について 1 回目に B となることなので $\boldsymbol{p_1 = \frac{2}{3}}$

◀ 最初の数項を具体的に計算して，規則性を探る。

p_2 について 1 回目に A または 1 回目，2 回目ともに B となることでこれらは排反であるから，

求める確率は $p_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{7}{9}}$

p_3 について 1 回目から 3 回目まですべて B または 1 回目と 2 回目で A と B が 1 回ずつとなることでこれらは排反であるから，求める確率は $p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8+12}{27} = \boldsymbol{\frac{20}{27}}$

(2) 点 $n+2$ に到達するのは 点 $n+1$ に到達しているとき B，または点 n に到達しているとき A が起こることで，これらは排反であるから $\boldsymbol{p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n}$ $\cdots$①

(3) ① の両辺から p_{n+1} を引くと

◀ 隣接 3 項間漸化式の特性方程式が 1 を解のもつときの解法

$$p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n - p_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(p_{n+1} - p_n\right)$$

これは数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ が初項 $p_2 - p_1 = \frac{7}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であることを表しているので

$$p_{n+1} - p_n = \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

(4) $n \geqq 2$ のとき

◀ 階差数列から一般項を決定

$$\begin{aligned} p_n &= p_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(p_{k+1} - p_k\right) \\ &= \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{9}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

これは $p_1 = \dfrac{2}{3}$ を満たす。

条件 $0.752 < p_n < 0.76$ は $0.752 < \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n} < 0.76$

◀ 対数を用いず，細かい数を評価する

辺々 $\dfrac{3}{4} = 0.75$ を引き

$0.002 < \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n} < 0.01$　を満たす自然数 n を求める。

$$0.008 < \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} < 0.04$$

n が奇数のときは満たさないので，自然数 k を用いて $n = 2k$ とし $0.008 < \left(\dfrac{1}{9}\right)^{k} < 0.04$

辺々の逆数を考えて $25 < 9^{n} < 125$

これを満たす自然数は $k = 2$，したがって $\boldsymbol{n = 4}$