$\boxed{\mathbf{58}}$ $f(x)=-6-\displaystyle\int_0^1(6xt-4)\,f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 〔三重〕

$$f(x)=-6-6x\int_0^1 tf(t)\,dt+4\int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{として}$$

◀ $\displaystyle\int$（被積分関数）dt の被積分関数内の x は定数扱い。

$$a=\int_0^1 tf(t)\,dt\cdots①,\quad b=\int_0^1 f(t)\,dt\cdots②$$

とすると $f(x)=-6-6ax+4b=-6ax+4b-6\cdots③$ とでき

◀ $\displaystyle\int_{\text{定数}}^{\text{定数}}$（被積分関数）$dt$ は定数

① は

$$\begin{aligned}a&=\int_0^1\left(-6at^2+(4b-6)\,t\right)dt\\&=\Big[-2at^3+(2b-3)\,t^2\Big]_0^1\\&=-2a+2b-3\end{aligned}$$

$$3a-2b=-3\cdots④$$

② は

$$\begin{aligned}b&=\int_0^1(-6at+4b-6)\,dt\\&=\Big[-3at^2+(4b-6)\,t\Big]_0^1\\&=-3a+4b-6\end{aligned}$$

$$3a-3b=-6\cdots⑤$$

④，⑤ を解いて $(a,b)=(1,3)$ を ③ に代入し

$\boldsymbol{f(x)=-6x+6}$

◀ 未知数 2 個について，方程式 2 本を立式し後は連立方程式として解くだけ

59 関数 $f(x)=-x^3+3x^2+x-3$ について，次の問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 であるものを，すべて求めよ。

(3) (2) で求めた接線のうち，y 切片が正のものを ℓ とする。x 軸，y 軸，$y=f(x)$ および ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ。〔金沢〕

(1) $f(1)=-1+3+1-3=0$ から $f(x)$ を $x-1$ で割り算し

◀ 3 次方程式の解法

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=0$ は

$$(x-1)(-x^2+2x+3)=0$$

$$(x-1)(x^2-2x-3)=0$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)=0$$ したがって $\boldsymbol{x=\pm1,\ 3}$

(2) $f'(x)=-3x^2+6x+1$ であり $f'(x)=1$ を解く。

◀ 接線の傾きは $f'(x)$ で表される

$$-3x^2+6x+1=1$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$ すなわち $x=0,\ 2$

◀ $x=t$ における接線の方程式を準備しておく方が，解答の効率はよいかも

- $x=0$ のとき，$f(0)=-3$ から 求める接線は $(0,-3)$ を通り傾きが 1 の直線なので $y=x-3$
- $x=2$ のとき，$f(2)=-8+12+2-3=3$ から $(2,3)$ を通り傾きが 1 の直線なので $y=(x-2)+3=x+1$

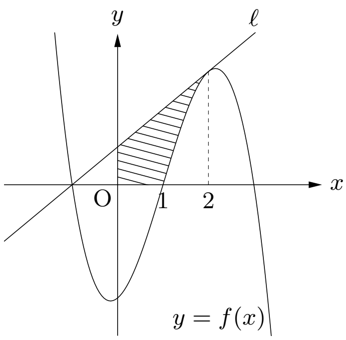
以上から $\boldsymbol{y=x-3}$，$\boldsymbol{y=x+1}$

(3) ℓ は $y=x+1$ である。下の図から

$0\leqq x\leqq 2$ で ℓ と $y=f(x)$ で挟まれている部分の面積を S_1，

$0\leqq x\leqq 1$ で x 軸と $y=f(x)$ で挟まれている部分の面積を S_2，

求める面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S &= S_1 - S_2 \\
&= \int_0^2 (x+1) - (f(x))\,dx - \int_0^1 (-f(x))\,dx \\
&= \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 4)\,dx - \int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 \\
&= (4 - 8 + 8) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{9}{4}}
\end{aligned}
$$

◀ S の計算は他にもある

60 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1=1,\quad a_nb_{n+1}=b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている。また，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 2 以上の整数 n に対して，b_{n+1} を b_n，b_{n-1} を用いて表せ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。〔和歌山〕

$a_{n+1}=\dfrac{2}{1+a_n}\cdots$ ⊛，$a_nb_{n+1}=b_n\cdots$ ✪ とする。

(1) すべての自然数 n について $a_n>0\,(\neq 0)$ および $b_n>0\,(\neq 0)$ であり，✪ から $a_n=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$，$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}}{b_{n+2}}$ を ⊛ に代入すると

◀ 誘導に従い，a_n，a_{n+1} を消去する方針をもつ

$$\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}=\frac{2}{1+\dfrac{b_n}{b_{n+1}}}=\frac{2b_{n+1}}{b_{n+1}+b_n}$$

$b_{n+1}\neq 0$ から両辺を b_{n+1} で割り

◀ 割り算するときは 0 で割らないよう注意する。

$$\frac{1}{b_{n+2}}=\frac{2}{b_{n+1}+b_n}$$

さらに両辺の逆数を考え $b_{n+2}=\dfrac{b_{n+1}+b_n}{2}$ となり

$n\geqq 2$ のとき

$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+b_{n-1}\right)}\cdots①\quad となる。$$

(2) ① の両辺から b_n を引くと

◀ $b_{n+1}-b_n$ を作ってみる。（方法は他にもあるが 3 項間漸化式になる）

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\left(b_n-b_{n-1}\right)-b_n=-\frac{1}{2}\left(b_n-b_{n-1}\right)\ \cdots②$$

また ✪ で $n=1$ とし $a_1b_2=b_1$ から $\frac{1}{2}b_2=1$ すなわち $b_2=2$ であり，② は数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ すなわち $\{c_n\}$ が，初項 $c_1=b_2-b_1=2-1=1$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを表すので

$$c_n=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(3) $n\geqq 2$ のとき

◀ 階差数列から一般項を求める公式

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $b_1 = 1$ を満たす。

したがって $\boldsymbol{b_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(4)　☆ から

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$$= \frac{5 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{5 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{5\cdot(-2)^n + 4}{5\cdot(-2)^n - 2}}$$