55 平面上の平行四辺形 OACB において，辺 AC の中点を M とする。辺 OA の長さが 8，辺 OB の長さが 6，線分 BM の長さが 7，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(3) 平行四辺形 OACB の面積 S を求めよ。

(4) 平行四辺形 OACB の周および内部にある点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 60$$

を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲の面積 T を求めよ。 〔宇都宮〕

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{b}=\boldsymbol{\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

◀ 基点を O とする位置ベクトルで表現してみる

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=7$ から

$$\left|\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2=7^2$$

$$|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2=49$$

$$64-\vec{a}\cdot\vec{b}+9=49$$

したがって $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=24}$

◀ ベクトルの大きさを平方すると，計算の過程で内積が出現する

(3) 面積公式から

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\&=\sqrt{8^2\cdot 6^2-24^2}\\&=\sqrt{48^2-24^2}\\&=24\sqrt{2^2-1^2}\\&=\boldsymbol{24\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀ ベクトルの面積公式（通常は三角形の面積）

(4) 条件式は

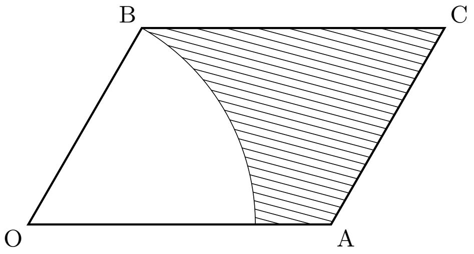
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 60$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\geqq 60$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\geqq 60-24=36\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|>0 \text{ から } |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geqq 6$$

点 P の存在範囲は下図の斜線部で境界はすべて含む。

◀ （内積を含む）ベクトルの条件式を図形で表現する



∠AOB について

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{24}{8\cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$ であり

$$T = S - \pi\times 6^2\times\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \mathbf{24\sqrt{3} - 6\pi}$$

56　a を実数とする。$y = 7 - \sin^2 x - 2a\cos x$ の最小値が a と等しくなるような a の値をすべて求めよ。　〔三重〕

$\cos x = t$ とする。x が任意の値をとるとき $-1 \leqq t \leqq 1 \cdots ①$ である。

$$\begin{aligned} y &= 7 - (1 - t^2) - 2at \\ &= t^2 - 2at + 6 \\ &= (t-a)^2 - a^2 + 6 \cdots ② \end{aligned}$$

◀ 置きかえを行えば，y は t の 2 次関数

② の最小値を ① の範囲で考えて

◀ 定義域が制限されているときの，定番の場合分け

- $a < -1$ のとき，$t = -1$ のとき最小値をとるので

  $1 + 2a + 6 = a$　を解いて $a = -7$

  これは $a < -1$ を満たす。
- $-1 \leqq a \leqq 1$ のとき，$t = a$ のとき最小値をとるので

  $-a^2 + 6 = a$　を解いて

  $a^2 + a - 6 = 0$

  $(a+3)(a-2) = 0$

  $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすものはない。
- $1 < a$ のとき，$t = 1$ のとき最小値をとるので

  $1 - 2a + 6 = a$　を解いて $a = \dfrac{7}{3}$

  これは $a > 1$ を満たす。

したがって $\boldsymbol{a = -7,\ \dfrac{7}{3}}$

57 $a=18^{50}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) $\log_{10}\sqrt{18}$，および $\log_{10}5$ の値を求めよ。

(2) a の桁数，および a の最高位の数字を求めよ。

(3) a を 5 進法で表したときの桁数，および最高位の数字を求めよ。　〔徳島〕

(1)
$$\begin{aligned}\log_{10}18&=\log_{10}\left(2\times3^2\right)\\&=\log_{10}2+2\log_{10}3\\&=0.3010+2\times0.4771\\&=1.2552\quad\text{であり}\end{aligned}$$

$$\log_{10}\sqrt{18}=\frac{1}{2}\log_{10}18=\frac{1}{2}\times1.2552=\mathbf{0.6276}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}5&=\log_{10}\frac{10}{2}\\&=\log_{10}10-\log_{10}2\\&=1-0.3010\\&=\mathbf{0.6990}\end{aligned}$$

◀ 対数の性質を用いて常用対数を計算する。

(2) $\log_{10}a=50\log_{10}18=50\times1.2552=62.76$ とでき $a=10^{62.76}$
したがって $10^{62}<a<10^{63}$ より a は **63** 桁の数値となる。
さらに (1) から $\log_{10}5=0.6990$ より $5=10^{0.6990}$
$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$ から
$6=10^{0.7781}$ とできて

$$10^{62.6990}<a<10^{62.7781}\quad\text{すなわち}$$

$$5\times10^{62}<a<6\times10^{62}\quad\text{より}$$

a の最高位の数字は **5** である。

◀ 桁数 $\longrightarrow$ 10^n の形で表す（評価する）

(3) $\log_5 a=\dfrac{\log_{10}a}{\log_{10}5}=\dfrac{62.76}{0.6990}=89.70\cdots$ から

$$5^{89}<a<5^{90}\quad\text{となり}$$

a は 5 進法で表すと **90** 桁の数となる。さらに

◀ 5 進法での桁数は 5^n の形で評価する

$$\log_5 3=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}5}=\frac{0.4771}{0.6990}=0.68\cdots$$

$$\log_5 4=\frac{\log_{10}4}{\log_{10}5}=\frac{0.6020}{0.6990}=0.86\cdots\quad\text{から}$$

$$5^{\log_5 3}\times5^{89}<a<5^{\log_5 4}\times5^{89}\quad\text{となるので}$$

a を 5 進法で表したとき，最高位の数字は **3** である。

◀ $a^{\log_a b}=b$