52 不等式

$$1 \leqq 2^y \leqq x \leqq 2022$$

を満たす整数 x，y の組の個数を求めよ。〔愛知教育〕

$2^{10} = 1024$，$2^{11} = 2048$ から

$0 \leqq k \leqq 10$ となる整数 k について $y = k$ のとき

$$1 = 2^0 \leqq 2^k \leqq x \leqq 2022$$

これを満たす格子点は

$$\left(2^k, k\right), \left(2^k + 1, k\right), \cdots, (2022, k)$$

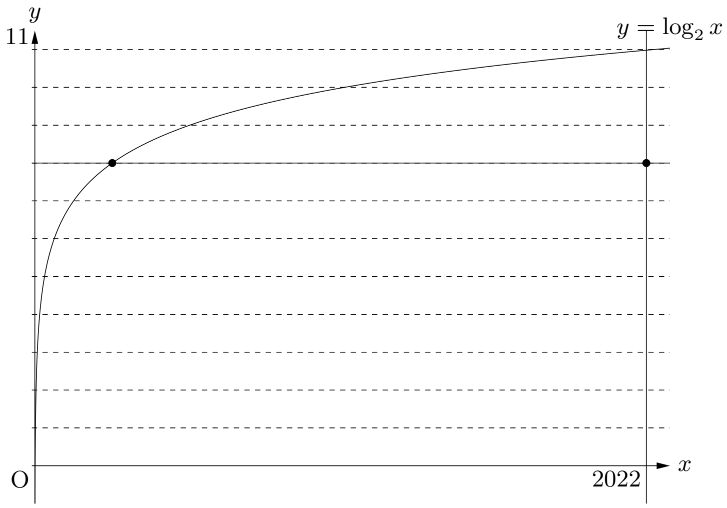
の $2022 - 2^k + 1 = 2023 - 2^k$ 個ある。

したがって求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{10}\left(2023 - 2^k\right) = 2023 \times 11 - \frac{2^{11} - 1}{2 - 1}$$
$$= 22253 - (2048 - 1))$$
$$= \mathbf{20206} \text{（個）}$$

◀ $x = k$ の形で格子点の個数を数えると $\sum_{k=1}^{2022}$ を，$y = k$ の形で考えると $\sum_{k=0}^{10}$ を計算することになる。

〔参考〕



53 3 つの袋 A，B，C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている，A，B，C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき，取り出したカードの番号を，X，Y，Z $(X \leqq Y \leqq Z)$ とする。たとえば A，B，C の袋からそれぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X = 16$，$Y = 24$，$Z = 24$ である。

(1) Z が 10 以下となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(2) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(3) Y が 12 で，X，Y，Z が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

〔群馬〕

(1) A，B，C いずれからも 10 以下のカードが取り出されるので
$10^3 = \mathbf{1000}$ 通り

◀ Z が 10 以下ということは，すべてのカードが 10 以下という解釈ができるようにする

(2)
- $X < Y < Z$ となるとき
  X は 1 以上 12 未満の 11 通り，Z は 12 超 30 以下の 18 通り
  X, Y, Z を A, B, C のどこから取り出すかで $3! = 6$ 通り
  したがって $11 \times 18 \times 6 = 1188$ 通り

- $X = Y < Z$ となるとき
  Z は 12 超 30 以下の 18 通り
  X, Y, Z を A, B, C のどこから取り出すかで 3 通り
  したがって $18 \times 3 = 54$ 通り

- $X < Y = Z$ となるとき
  X は 1 以上 12 未満の 11 通り
  X, Y, Z を A, B, C のどこから取り出すかで 3 通り
  したがって $11 \times 3 = 33$ 通り

- $X = Y = Z$ となるとき　1 通り

$X \leqq Y \leqq Z$ となるのは，上の 4 つの場合しかなくそれぞれ排反であるから，求めるものは $1188 + 54 + 33 + 1 = \mathbf{1276}$ 通り

◀ カードの入れ替えに対応できるような排反な条件で場合分けする

(3) X，Y，Z がこの順で等比数列をなすとき $XZ = Y^2 = 12^2$ となる。$X \leqq Y \leqq Z$ さらにすべて 30 以下の条件で
$(X, Y, Z) = (6, 12, 24), (8, 12, 18), (12, 12, 12), (9, 12, 16)$
の 4 通りある。$(X, Y, Z) = (12, 12, 12)$ 以外は A, B, C からの取り出し方でそれぞれ 6 通りあるので，求めるものは
$3 \times 6 + 1 = \mathbf{19}$ 通り

◀ 3 数が等比数列をなす条件
→ 等比中項

54 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) a_{11} を小数で表したとき，初めて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か答えよ。もし必要なら，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使用してもよい。〔福井〕

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 3} \cdots ⊛$ とする。

条件式からすべての n について $a_n > 0\,(\fallingdotseq 0)$ から ⊛ の両辺の逆数を考えることができ

◀ 経験則から両辺の逆数をとることを知っていれば簡明

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \frac{3}{a_n}$$

すなわち $\color{red}{\boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n + 1}}$ $\cdots$ ①

〔別解〕

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ のとき，$a_n = \dfrac{1}{b_n}$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{b_{n+1}}$ を ⊛ に代入すると

◀ 誘導から $a_n = \sim$，$a_{n+1} = \sim$ をもとの漸化式に代入すれば $\{a_n\}$ 関連の項が消去でき，$\{b_n\}$ の漸化式が得られる。

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{b_n}}{\dfrac{1}{b_n} + 3} = \frac{1}{1 + 3b_n}$$

したがって $\color{red}{\boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n + 1}}$

(2) ① の両辺に $\dfrac{1}{2}$ を加えて

◀ (1)から $\{b_n\}$ の隣接 2 項間漸化式が得られているので b_n が決定できる。

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3b_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + 1\right)$$

これは数列 $\left\{b_n + \dfrac{1}{2}\right\}$ が,

初項 $b_1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列となることを表す。したがって $b_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1} = \dfrac{1}{2}\cdot 3^n$

$$b_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \color{red}{\boldsymbol{\frac{2}{3^n - 1}}}$$

(3) (2) より $a_{11} = \dfrac{2}{3^{11} - 1}$ であり $2\cdot 3^{10} < 3^{11} - 1 < 3^{11}$ から

◀ $a_{11} \fallingdotseq \dfrac{2}{3^{11}}$ として近似値を求めても解らしいものは得られるが，数学的には `N.G.`

$$\frac{2}{3^{11}} < \frac{2}{3^{11} - 1} < \frac{2}{2\cdot 3^{10}}$$

すなわち $\dfrac{2}{3^{11}} < a_{11} < \dfrac{1}{3^{10}}$

さらに

$$\log_{10}\frac{2}{3^{11}} = \log_{10}2 - 11\log_{10}3 = -4.9471$$

$$\log_{10}\frac{1}{3^{10}} = -10\log_{10}3 = -4.771$$

したがって

$$-4.9471 < \log_{10}a_{11} < -4.771$$

$$a^{-4.9471} < a_{11} < a^{-4.771}$$

となり，a_{11} は小数第 **5** 位に初めて 0 でない数字が出現する。