49 3 桁の数に対して，さいころを 1 回投げたとき，出る目に応じて次の (A) から (D) のいずれかの操作を行う。

(A) 1 の目が出たとき，一の位の数字と十の位の数字を入れ換える。

(B) 2 の目が出たとき，一の位の数字と百の位の数字を入れ換える。

(C) 3 の目が出たとき，十の位の数字と百の位の数字を入れ換える。

(D) 4 または 5 または 6 の目が出たとき，何もしない。

最初の 3 桁の数字を 123 とし，さいころを続けて n 回投げたとき，3 桁の数が 123 である確率を p_n，231 と 312 のいずれかである確率を q_n，213 と 321 と 132 のいずれかである確率を r_n とする。次の問に答えよ。

(1) p_1，q_1，r_1，p_2，q_2，r_2 を求めよ。

(2) 次の等式を満たす定数 a, b, c, d, e, f, g を一組求めよ。

$$p_{n+1} = a\,p_n + b\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$q_{n+1} = c\,q_n + d\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$r_{n+1} = e\,p_n + f\,q_n + g\,r_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) r_n を求めよ。

(4) p_n，q_n を求めよ。 〔埼玉〕

(1) p_1 について 1 回目に (D) の操作を行うことなので $\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{2}}$

◀ 具体例を考えることで，法則をつかむ

q_1 について 1 回の操作で 231 または 312 となることはないので $\boldsymbol{q_1 = 0}$

r_1 について (A) または (B) または (C) の操作を行うことなので $\boldsymbol{r_1 = \frac{1}{2}}$

p_2 について p_1 のとき (D) または r_1 のとき対応する 1 または 2 または 3 のいずれかの操作

したがって $p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{6}r_1$ すなわち $\boldsymbol{p_2 = \frac{1}{3}}$

q_2 について r_1 の状態から対応する 1 または 2 または 3 のいずれか 2 つのの操作

したがって $q_2 = \frac{2}{6}r_1$ すなわち $\boldsymbol{q_2 = \frac{1}{6}}$

r_2 について p_1 のとき 1 または 2 または 3 のいずれかの操作 または r_1 の状態で (D)

したがって $r_2 = \frac{3}{6}p_1 + \frac{3}{6}r_1$ すなわち $\boldsymbol{r_2 = \frac{1}{2}}$

(2) (1) と同様に考えて

◀ 一般化した法則を，漸化式で表す

$$p_{n+1}=\frac{3}{6}p_n+\frac{1}{6}r_n$$

$$q_{n+1}=\frac{3}{6}q_n+\frac{2}{6}r_n$$

$$r_{n+1}=\frac{3}{6}p_n+\frac{3}{6}q_n+\frac{3}{6}r_n$$ したがって

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$$

(3) すべての n について $p_n+q_n+r_n=1$ より (3) の結果を用いて

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)=\frac{1}{2}$$ すなわち $\boldsymbol{r_n=\frac{1}{2}}$

(4) (3) の結果を (2) の漸化式に代入し

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{12}$$

両辺から $\frac{1}{6}$ を引いて

$$p_{n+1}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{6}\right)$$

これは，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{6}\right\}$ が初項 $p_1-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となることを表す。

したがって $p_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

すなわち $\boldsymbol{p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

q_n については $p_n+q_n+r_n=1$ から

$$\begin{aligned}q_n&=1-(p_n+r_n)\\&=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

〔参考〕

◀ 試験時間内では悠長に作成はできないが，次のような表があると考えやすい

		1		2		3		4		5		6	
P	123	132	R	321	R	213	R	123	P	123	P	123	P
Q	231	213	R	132	R	321	R	231	Q	231	Q	231	Q
Q	312	321	R	213	R	132	R	312	Q	312	Q	312	Q
R	213	231	Q	312	Q	123	P	213	R	213	R	213	R
R	321	312	Q	123	P	231	Q	321	R	321	R	321	R
R	132	123	P	231	Q	312	Q	132	R	132	R	132	R

$\boxed{\mathbf{50}}$ 不等式 $x^2+y^2-6x-4y+12 \leqq 0$ の表す領域を D とする。以下の問いに答えよ。

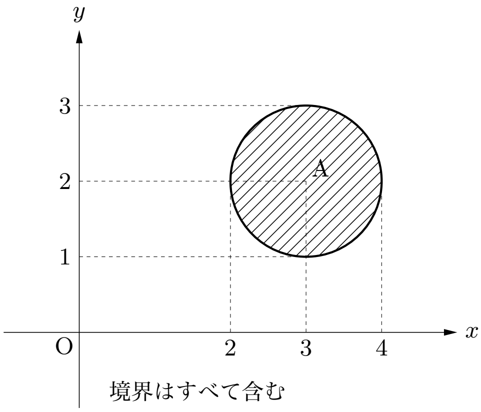
(1) 領域 D を解答用紙の座標平面上に図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$2x+1$ の最大値を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ。

(4) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，$\dfrac{y}{x}$ の最小値を求めよ。 〔豊橋技術科学〕

(1) 与えられた不等式は $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 1$ となり，
D は中心 $(3, 2)$，半径 1 の円の周および内部



境界はすべて含む

以下解説のため $\mathrm{A}(3, 2)$，$r=1$ とする。

(2) D においては $2 \leqq x \leqq 4$ より $5 \leqq 2x+1 \leqq 9$
したがって $2x+1$ の最大値は **9** $(x, y)=(4, 2)$

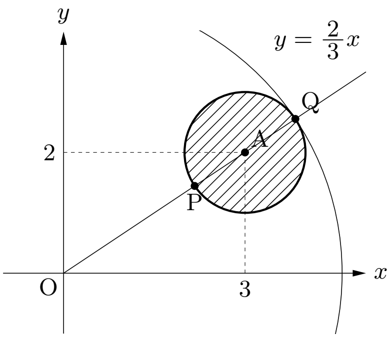
(3) $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$ $\cdots$① とする。
① は中心 $\mathrm{O}(0, 0)$，半径 R の円を表す。
① が領域 D と共有点をもつように R を動かし，R^2 の最大値を考える。

◀（評価する関数）＝（定数）とおき，これを図形と考える。この図形が D と共有点をもつような定数の範囲を求める。

① と OA の 2 つの交点を O に近い方から P, Q とする。

R の最大値は

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ} &= \mathrm{OA}+\mathrm{AQ} \\ &= \mathrm{OA}+r \\ &= \sqrt{13}+1\end{aligned}$$



求める最大値は
$R^2=\mathbf{14+2\sqrt{13}}$

(4) $\dfrac{y}{x}=m\cdots$② とする。② は $y=mx$ とでき，O を通り，傾き m の直線を表す。

② が領域 D と共有点をもつように m を動かし，m の最小値を考える。

② が D の境界と接するのは ② を $mx-y=0$ として

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2-(-1)^2}}=1$$

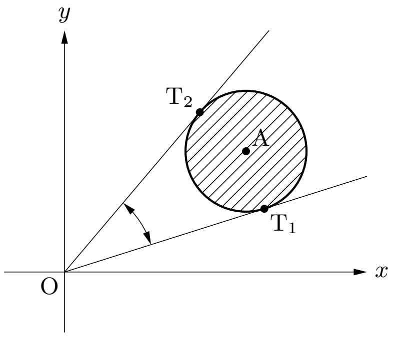
を解いて

$$|3m-2|=\sqrt{m^2+1}$$

$$|3m-2|^2=m^2+1$$

$$8m^2-12m+3=0$$

$$m=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$



図から求める最小値は $m=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}}$

◀ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ は $x \fallingdotseq x_1$ のとき，2 点 (x_1, y_1)，(x, y) を通る直線の傾きを表す

51 数列 $\{a_n\}$ を初項が 12 で公差 8 の等差数列とする。また，次の条件で定められる数列 $\{b_n\}$ がある。

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

(5) 数列 $\{c_n\}$ を，次のように定める。各自然数 m に対して，(4) の和 S_n が

$$\frac{1}{2} - S_n < \frac{1}{10^m}$$

となるような最小の自然数 n を c_m とする。このとき，和 $\sum_{k=1}^{m} c_k$ を求めよ。〔岐阜〕

(1) $a_n = 12 + (n-1)\cdot 8 = \mathbf{8n+4}$

◀ 等差数列の一般項

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (8k+4) = \frac{1}{2}n\{12 + (8n+4)\} = \mathbf{4n(n+2)}$

◀ 等差数列の和

(3) $b_{n+1} - b_n = a_n$ であり，$n \geqq 2$ のとき

(2) から $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = 4(n-1)(n+1)$ さらに

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{n+1} - b_n) \\ &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= 3 + 4(n-1)(n+1) \\ &= 4n^2 - 1 \end{aligned}$$

◀ 階差数列が与えられている数列

これは $b_1 = 3$ を満たす。したがって $\mathbf{b_n = 4n^2 - 1}$

(4) $$\begin{aligned} \frac{1}{b_k} &= \frac{1}{4k^2-1} \\ &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \end{aligned}$$ を用いて

◀ 分母が因数分解できる分数式の和
⟶ 部分分数分解が似合う

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$

(5)　(4) から $\dfrac{1}{2} - S_n = \dfrac{1}{2(2n+1)}$ であり，条件式は

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{10^m}$$

$$10^m < 2(2n+1) \quad \text{すなわち} \quad n > 25\cdot 10^{m-2} - \frac{1}{2} \quad \text{から}$$

$m=1$ のとき $c_1 = 3$，$m \geqq 2$ のとき $c_m = 25\cdot 10^{m-2}$ となり

$m \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} c_k &= c_1 + \sum_{k=2}^{m} 25\cdot 10^{k-2} \\ &= 3 + 25\cdot\frac{10^{m-1}-1}{10-1} \\ &= \frac{25\cdot 10^{m-1}+2}{9} \end{aligned}$$

◀ 2 項目以降は等差数列をなしている

これは $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} c_k = c_1 = 3$ を満たす。

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k = \boldsymbol{\frac{25\cdot 10^{m-1}+2}{9}}$