$\boxed{\textbf{45}}$ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$ とする。$t \geqq -3$ とし，$S(t)=\int_{-3}^{t}|f(x)|\,dx$ とする。次の各問いに答えよ。

(1) 2 次不等式 $f(x)<0$ を解け。

(2) $S(-2)$，$S(1)$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) t の関数 $S(t)$ を求めよ。 〔埼玉〕

(1)
$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1<0$$
$$x^2+x-2<0$$
$(x+2)(x-1)<0$ したがって $\boldsymbol{-2<x<1}$

(2) (1) から $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき $|f(x)|=-f(x)$,
$x \leqq -2,\ 1 \leqq x$ のとき $|f(x)|=f(x)$ となる。
説明ため $f(x)$ の原始関数の 1 つを
$F(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2-x$ とする。
$F(-3)=\frac{3}{4}$，$F(-2)=\frac{5}{3}$，$F(1)=-\frac{7}{12}$

◀ 後の計算のための下準備

$$\begin{aligned}S(-2)&=\int_{-3}^{-2}|f(x)|\,dx\\&=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx\\&=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{-2}\\&=F(-2)-F(-3)\\&=\frac{5}{3}-\frac{3}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{11}{12}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(1)&=\int_{-3}^{1}|f(x)|\,dx\\&=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx+\int_{-2}^{1}(-f(x))\,dx\\&=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{-2}+\Big[-F(x)\Big]_{-2}^{1}\\&=F(-2)-F(-3)-F(1)+F(-2)\\&=\frac{5}{3}-\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{5}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{19}{6}}\end{aligned}$$

◀ 積分区間を分割して，被積分関数の絶対値を外す

(3)

- $-3 \leqq t < 2$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \Big[F(x)\Big]_{-3}^{t} \\ &= F(t) - F(-3) \\ &= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- $-2 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \Big[F(x)\Big]_{-3}^{-2} + \Big[-F(x)\Big]_{-2}^{t} \\ &= F(-2) - F(-3) - F(t) + F(-2) \\ &= -\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + t + \frac{31}{12} \end{aligned}$$

- $1 < t$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \Big[F(x)\Big]_{-3}^{-2} + \Big[-F(x)\Big]_{-2}^{1} + \Big[F(x)\Big]_{1}^{t} \\ &= F(-2) - F(-3) - F(1) + F(-2) + F(t) - F(1) \\ &= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - t + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

46 m は実数とする。x の 2 次方程式

$$x^2-(m+2)x+2m+4=0$$

の $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき，m の値の範囲を求めよ。ただし，重解の場合，実数解の個数は 1 つと数える。〔信州〕

$f(x)=x^2-(m+2)x+2m+4$ とし，$f(x)=0\cdots$⊛ とする。

⊛ が重解をもつのは（判別式）$=0$ から

$(m+2)^2-4(2m+4)=0$　を解いて

$m^2-4m-12=0$

$(m+2)(m-6)=0$　となり $m=-2,\ 6$

- $m=-2$ のとき ⊛ の重解は $x=\dfrac{m+2}{2}=0$ であり，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。
- $m=6$ のとき ⊛ の重解は $x=\dfrac{m+2}{2}=4$ であり，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にただ 1 つの解をもたない。

⊛ が異なる 2 つの実数解をもつのは

（判別式）>0 から $m<-2,\ 6<m\cdots$①

以下 ① の範囲で考える。

- ⊛ が $x=-1$ を解にもつとき

  $1+(m+2)+2m+4=0$　から $m=-\dfrac{7}{3}$

  このとき ⊛ は $x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}=0$

  $(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=0$　から $x=-1,\ \dfrac{2}{3}$ となり

  $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にただ 1 つの解をもたない。(2 つもつ)
- ⊛ が $x=3$ を解にもつとき

  $9-3(m+2)+2m+4=0$　から $m=7$

  このとき ⊛ は $x^2-9x+18=0$

  $(x-3)(x-6)=0$　から $x=3,\ 6$ となり

  $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。

また，⊛ が $-1<x<3$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ必要十分条件は

$f(-1)\times f(3)<0$　であり

$(3m+7)(-m+7)<0$

$(3m+7)(m-7)>0$　から $m<-\dfrac{7}{3},\ 7<m$

これらはすべて ① を満たす。

以上のことから，求める範囲は $\boldsymbol{m<-\dfrac{7}{3},\ m=-2,\ 7 \leqq m}$

◀ いわゆるかの配置問題であるが，閉区間でただ 1 つの解の扱いが少し煩雑である。

◀ まず，重解をもつ場合とそうでない排反な形で場合分けする

◀ 中間値の定理の応用形

47 $a>0$ とする。xy 平面上に放物線 $H: y=x^2$ と H 上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ を考える。点 A を接点とする H の接線を ℓ で表す。また，点 A を通り直線 ℓ に垂直な直線を n で表す。以下の問に答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 n の方程式を求めよ。

(3) 直線 n と放物線 H の点 A とは異なる共有点の座標を a を用いて表せ。

(4) 放物線 H と直線 n で囲まれる部分の面積 S を a を用いて表せ。

(5) a が，$a>0$ の範囲を動くとき，(4) の面積 S の最小値とそのときの a の値を求めよ。　〔岐阜〕

(1) H について $y'=2x$ から $x=a$ における接線 ℓ の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2$　すなわち $\boldsymbol{y=2ax-a^2}$

◀ 曲線上の点における接線の方程式

(2) $a \neq 0$ から直線 n の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ より，n の方程式は

◀ 直交する直線の傾きの関係

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$　すなわち $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}}$

(3) $x^2=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$ を解く。

$$x^2+\frac{1}{2a}x-a^2-\frac{1}{2}=0$$

◀ この方程式の解の 1 つは $x=a$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

$x \neq a$ となる解は $x=-a-\dfrac{1}{2a}$，したがって求める座標は

$$\boldsymbol{\left(-a-\frac{1}{2a},\ \left(-a-\frac{1}{2a}\right)^2\right)}$$

(4) 説明のため $t=-a-\dfrac{1}{2a}$ とする。$a>0$ のとき $t<a$ であり，区間 $t \leqq x \leqq a$ では H は n の下方にあるので

◀ 置き換えておく方が，見た目もスッキリするし被積分関数と積分区間の関係も明示しやすい

$$S=\int_t^a \left\{x^2-\left(-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_t^a (x-a)(x-t)\,dx$$

$$=-\frac{-1}{6}\cdot(a-t)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3}$$

(5) (4) の結果から S が最小値をとるのは $2a+\dfrac{1}{2a}$ が最小値をとるときを考える。

$a>0$ のとき，$2a>0$，$\dfrac{1}{2a}>0$ であり，相加・相乗平均の関係

を用いると

$$2a+\frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

この等号が成立するのは $2a=\dfrac{1}{2a}$ かつ $a>0$ から $a=\dfrac{1}{2}$ のときである。

したがって S は $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる。

48 次の方程式の表す図形を xy 平面上に図示せよ。

$$\log_2 x = \log_4 (x+y+2)$$

〔弘前〕

真数条件から $\begin{cases} x > 0 \\ x+y+2 > 0 \end{cases}$ $\cdots$ ①

◀ 真数条件を満たすことは大前提

この範囲で考えて

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = \frac{\log_4 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_4 x = \log_4 x^2$$

したがって

◀ 底を揃えて真数同士の比較にもちこむ

$$\log_4 x^2 = \log_4 (x+y+2)$$

$x^2 = x+y+2$ すなわち $y = x^2 - x - 2 \cdots$ ②

求める図形は ① と ② の共通部分で下図の太線部分

ただし $(0, -2)$ は含まない。