42 四面体 OABC において，3 点 O，A，B を通る平面を α とし，点 C から α へ引いた垂線と α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

であるとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。〔会津(一部改)〕

(1) 面積公式から

◀ ベクトルの三角形の面積公式（平面・空間どちらでも使用できる）

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

(2) 点 C が平面 OAB (α) 上にあるとき，実数 s，t を用いて

◀ 垂線の足の位置ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とできる。

(平面 OAB) $\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ から

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ となるとき

$$\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$s+\frac{1}{3}t=0\cdots①$$

- $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ となるとき

$$\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$\frac{1}{3}s+t-\frac{2}{3}=0\cdots②$$

①，② を解いて $(s,t)=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$

したがって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\vec{c}$ とでき

◀ 三角すいの体積を求めるのに，必要な数値

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\frac{1}{16}|-\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}|^2$$
$$=\frac{1}{16}\{|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2$$
$$-6\vec{a}\cdot\vec{b}-24\vec{b}\cdot\vec{c}+8\vec{c}\cdot\vec{a}\}$$
$$=\frac{1}{16}(1+9+16-2-16+0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| > 0$ から $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

（求める体積）$= \dfrac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{OAB} \cdot \mathrm{CH} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

43 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじを，A と B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし，引いたくじはもとに戻さない。この操作をくじがなくなるまで繰り返すとき，以下の問いに答えよ。

(1) A が 3 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(2) A が 2 本，B が 1 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(3) A が先に 2 本の当たりくじを引き，その後に B が 1 本の当たりくじを引く確率を求めよ。

(4) 最初に当たりくじを引くのが B である確率を求めよ。

(5) B が少なくとも 1 本の当たりくじを引いたとき，最初に当たりくじを引いたのが B であった確率を求めよ。

〔会津(一部改)〕

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5	B_5

当たりくじを ○，はずれくじを×で表す。

くじの引き方の総数は，A_1 から B_5 までの 10 ヶ所に○を 3 個，×を 7 個並べる並べ方なので

$$\frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ (通り)}$$

◀ もちろん ${}_{10}C_3$ や ${}_{10}C_7$ でもよい

(1) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の 5 ヶ所から 3 ヶ所選んで○を並べるのは ${}_5C_3 = 10$ 通りなので，求める確率は $\dfrac{10}{120} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

(2) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の 5 ヶ所から 2 ヶ所, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 の 5 ヶ所から 1 ヶ所選んで○を並べるのは

${}_5C_2 \times {}_5C_1 = 50$ 通りなので，求める確率は $\dfrac{50}{120} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

(3) 当たりくじが A_i，A_j，B_k であることとする。$(i < j)$

◀ 地道に場合分け

- $j = 2$ のとき
  $i = 1$，$k = 2, 3, 4, 5$ 　　4 通り
- $j = 3$ のとき
  $i = 1, 2$，$k = 3, 4, 5$ 　　6 通り
- $j = 4$ のとき
  $i = 1, 2, 3$，$k = 4, 5$ 　　6 通り
- $j = 5$ のとき
  $i = 1, 2, 3, 4$，$k = 5$ 　　4 通り

したがって求める確率は $\dfrac{4+6+6+4}{120} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

〔別解〕工夫した解法

当たりくじが A_i，A_j，B_k であることとする。

条件から $i < j \leqq k \cdots$ ① を満たす (i, j, k) の組の個数を求

◀ 場合分けして求めても(もちろん)よいが，工夫して 1 本の式で求めることを考えてみた

める。

①のとき $i < j < k+1 \cdots$ ② となる。

② を満たす $(i, j, k+1)$ の組は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 ヶ所から 3 ヶ所選んで小さい方から i，j，$k+1$ としたものである。

これを当たりくじが A_i，A_j，B_k であることに対応させることができる。条件を満たすくじの引き方は ${}_6C_3 = 20$ 通りなので

求める確率は $\dfrac{20}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(4)
- 最初の当たりが B_1 のとき，A_2〜B_5 の 8 ヶ所から 2 ヶ所選んで○を並べる並べ方は ${}_8C_2 = 28$ 通り
- 最初の当たりが B_2 のとき，A_3〜B_5 の 6 ヶ所から 2 ヶ所選んで○を並べる並べ方は ${}_6C_2 = 15$ 通り
- 最初の当たりが B_3 のとき，A_4〜B_5 の 4 ヶ所から 2 ヶ所選んで○を並べる並べ方は ${}_4C_2 = 6$ 通り
- 最初の当たりが B_4 のとき，A_5，B_5 の 2 ヶ所から 2 ヶ所選んで○を並べる並べ方は ${}_2C_2 = 1$ 通り
- 最初の当たりが B_5 となることはない。

◀ しっかり場合分けする。(5) のためにもしっかり計算しておく。

条件を満たす当たりくじの引き方は $28+15+6+1 = 50$ 通り

求める確率は $\dfrac{50}{120} = \mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(5) B が少なくとも 1 本当たりくじを引くのは (1) の余事象なので，その確率は $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$，(4) の結果を用いて，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{11}{12}} = \mathbf{\frac{5}{11}}$$

44 18^{50} は何桁の整数か。また，$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{40}$ を小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。〔茨城〕

$$\begin{aligned}\log_{10} 18 &= \log_{10}\left(2 \times 3^2\right)\\ &= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3\\ &= 0.3010 + 2 \times 0.4771\\ &= 1.2552 \quad \text{であり}\end{aligned}$$

$$\log_{10} 18^{50} = 50\log_{10} 18 = 50 \times 1.2552 = 62.76$$

$18^{50} = 10^{62.76}$ から $10^{62} < 18^{50} < 10^{63}$ となり
18^{50} は **63** 桁の数である。

◀ $10^{62} \longrightarrow 63$ 桁の最小の数，
$10^{63} \longrightarrow 64$ 桁の最小の数
したがって 18^{50} は 63 桁の数

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{1}{25} &= \log_{10}\frac{4}{100}\\ &= 2\log_{10} 2 - \log_{10} 100\\ &= 2 \times 0.3010 - 2\\ &= -1.3980 \quad \text{であり}\end{aligned}$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{25}\right)^{40} = 40\log_{10}\frac{1}{25} = 40 \times (-1.3980) = -55.92$$

$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{40} = 10^{-55.92}$ から $10^{-56} < \left(\dfrac{1}{25}\right)^{40} < 10^{-55}$ となり
$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{40}$ は小数第 **56** 位に初めて 0 でない数字が現れる。

常用対数が整数でないときの桁数の答え方は，絶対値を**切り上げ**して答えるとよい。