39 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n = na_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。〔新潟〕

(1) それぞれの漸化式 $(n \geqq 1)$

$$a_1 = 3,\quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \cdots ①$$

$$b_n = na_n \cdots ②$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \cdots ③ \quad から$$

$$a_2 = \frac{3\cdot 1}{1+1}a_1 - 10 = \frac{3}{2}\cdot 3 - 10 = \boldsymbol{-\frac{11}{2}}$$

$$a_3 = \frac{3\cdot 2}{2+1}a_2 - 10 = 2\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) - 10 = \boldsymbol{-21}$$

$$b_1 = 1\cdot a_1 = \boldsymbol{3}$$

$$b_2 = 2a_2 = \boldsymbol{-11}$$

$$b_3 = 3a_3 = \boldsymbol{-63}$$

$$c_1 = b_2 - b_1 = -11 - 3 = \boldsymbol{-14}$$

$$c_2 = b_3 - b_2 = -63 - (-11) = \boldsymbol{-52}$$

◀ 漸化式から正確に計算する。

(2) ① の両辺の分母を払い

$$(n+1)\,a_{n+1} = 3na_n - 10\,(n+1)$$

② を用いて

$$\boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n - 10\,(n+1)} \cdots ④$$

◀ 分母を払うことに気づかなければ $a_n = \frac{b_n}{n}$，$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{n+1}$ として ① に代入すると a_n，a_{n+1} が消去され(自然に) b_n，b_{n+1} の関係式が得られる。

(3) ④ の n を $n+1$ にかえて

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 10\,(n+2) \cdots ⑤$$

⑤ − ④ から

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 3\,(b_{n+1} - b_n) - 10$$

◀ ⑤ の定数部分の 1 次式を定数化する常套手段

③ を用いて

$$\boldsymbol{c_{n+1} = 3c_n - 10} \cdots ⑥$$

(4) ⑥ の両辺から 5 を引く

◀ ⑥ は頻出の隣接 2 項間漸化式

$$c_{n+1} - 5 = 3c_n - 10 - 5 = 3\left(c_n - 5\right) \quad \text{から}$$

数列 $\{c_n - 5\}$ は，

初項 $c_1 - 5 = -19$，公比 3 の等比数列となるので

$$c_n - 5 = -19 \cdot 3^{n-1} \quad \text{すなわち}$$

$$\boldsymbol{c_n = 5 - 19 \cdot 3^{n-1}}$$

次に $n \geqq 2$ のとき

◀ 階差数列による一般項の定義

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_{k+1} - b_k\right) \\ &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(5 - 19 \cdot 3^{k-1}\right) \\ &= 3 + 5\left(n-1\right) - 19 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \\ &= 5n - \frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2} \end{aligned}$$

これは $b_1 = 3$ を満たす。したがって

$$\boldsymbol{b_n = 5n - \frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2}}$$

最後に ② から $a_n = \dfrac{b_n}{n}$ から

$$\boldsymbol{a_n = 5 - \frac{19}{2n} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2n}}$$

40 a，b を実数の定数とする。x の多項式 $P(x)$，$Q(x)$ を，

$$P(x)=x^5+ax^3+bx,\quad Q(x)=x^3-4x^2-4x+16$$

とする。$P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れるとき，a，b の値を求めよ。〔茨城(一部改)〕

$Q(x)=(x-2)(x^2-2x-8)=(x-2)(x+2)(x-4)$ であり

$P(x)$ を $Q(x)$ で割り算したときの商を $A(x)$ とすると

$P(x)=Q(x)A(x)=(x-2)(x+2)(x-4)\,A(x)\cdots$① とでき

①から

$P(2)=0\cdots$② かつ $P(-2)=0\cdots$③ かつ $P(4)=0\cdots$④

②は $32+8a+2b=0$，③は $-32-8a-2b=0$，

④は $1024+64a+4b=0$

②，③，④すべて満たすのは $\boldsymbol{(a\,,\,b)=(-20\,,\,64)}$

〔別解〕5 次式 $P(x)$ を 3 次式 $Q(x)$ で割り算した商は x^2 の係数が 1 の 2 次式なので x^2+cx+d とできる。このとき

$$P(x)=Q(x)\,(x^2+cx+d)$$

$$\begin{aligned}x^5+ax^3+bx&=(x^3-4x^2-4x+16)(x^2+cx+d)\\&=x^5+(-4+c)\,x^4+(-4-4c+d)\,x^3\\&\quad+(16-4c-4d)\,x^2+(16c-4d)\,x+16d\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases}-4+c=0\\-4-4c+d=a\\16-4c-4d=0\\16c-4d=b\\16d=0\end{cases}$$

を解いて $\boldsymbol{(a\,,\,b)=(-20\,,\,64)}$

◀

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & -4 & -4 & 16\\ & & 2 & -4 & -16\\\hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0}\end{array}$$

◀ 未知数が a，b の 2 個で，方程式が 3 本あるとき，「解なし」となる場合があるので注意が必要

41 $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta \geqq 1$ 〔長崎〕

三角関数の合成を用いると，与えられた不等式は

◀ 三角関数の合成の基本形

$$2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geqq 1$$

$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + 2\pi$ の範囲で

◀ 角に制限があるので，注意が必要

$$\frac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$$

$$0 \leqq 2\theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}}$$

〔別解〕cos で合成した場合

与えられた不等式は

$$2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \geqq 1$$

$$\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{3} + 2\pi$ の範囲で

$$-\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leqq 2\theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}}$$