36 a，b を正の実数とする。$a \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{3-\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 b}$ が成り立つ x の範囲を求めよ。〔三重〕

$\log_{\frac{1}{2}} x$ の真数条件から $x > 0 \cdots$ ① で考える。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} = x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 b} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 b} = \left(2^{\log_2 b}\right)^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b}$$ とでき

与えられた不等式の右辺は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 b} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{b}$$ から

$$a \leqq \frac{1}{8xb}$$ を解き

$a > 0$，$x > 0$ から $x \leqq \dfrac{1}{8ab}$

① との共通範囲は $\boldsymbol{0 < x \leqq \dfrac{1}{8ab}}$

◀ 対数が出現するので真数条件を確認する

◀ 定義から $a^{\log_a b} = b$

37 次の問いに答えよ。ただし，必要があれば次の命題 (A)，(B) が成り立つことを用いてよい。

(A) x，y を有理数とする。このとき $x+y$，$x-y$，xy は有理数である。さらに $y \fallingdotseq 0$ ならば，$\dfrac{x}{y}$ は有理数である。

(B) $\sqrt{2}$ は無理数である。

(1) r を正の実数とするとき，$0 < \sqrt{r^2+1} - r < 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) a，b を有理数とし，$a \neq b$ とする。さらに，$c = (b-a)\left(\sqrt{2}-1\right)$ とする。このとき c は無理数であることを，背理法を用いて証明せよ。

(3) a，b を有理数とし，$a < b$ とする。このとき，a と b の間には無理数が必ず存在することを証明せよ。

〔富山県立〕

(1) $r > 0$ のとき $r^2+1 > r^2$ から $\sqrt{r^2+1} > \sqrt{r^2} = r$ より

$0 < \sqrt{r^2+1} - r$ は成り立つ。次に

◀ 分子の有利化（数学 Ⅲ では頻出）

$$\sqrt{r^2+1} - r = \frac{\sqrt{r^2+1}^2 - r^2}{\sqrt{r^2+1}+r} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}+r} \quad \cdots ①$$

ここで $r > 0$ から $\sqrt{r^2+1} + r > 1$ であり（① の右辺）< 1 となり（① の左辺）< 1 が成り立つ。

したがって $0 < \sqrt{r^2+1} - r < 1$ が成り立つ。

(2) $a \fallingdotseq b$ から $b-a \fallingdotseq 0$ であり条件式の両辺を $b-a$ で割り，

◀ 背理法の基本形

$\dfrac{c}{b-a} = \sqrt{2}-1$ から $\sqrt{2} = \dfrac{c}{b-a} + 1 \cdots ②$ を得る。

c を有理数と仮定すると ② の左辺は (B) から無理数，右辺は (A) から有理数となり矛盾する。

したがって c は無理数である。

(3) 数直線上で $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ を $1:\sqrt{2}$ に内分する点 $\mathrm{P}(x)$ の座標は

◀ (2)の式が使用できるような値を選んだ。（経験が必要）

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}a+b}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}a+a-a+b}{1+\sqrt{2}} \\ &= a + \frac{-a+b}{1+\sqrt{2}} \\ &= a + (b-a)\left(\sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$

$$x - a = (b-a)\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \cdots ③$$

x を有理数と仮定すると ③ において，左辺は (A) から有理数，右辺は (2) より無理数となり矛盾する。したがって x は無理数となる。これは AB の内分点 x すなわち $a < x < b$ となる無理数 x が存在することを示している。

38 xy 平面上の放物線 $C : y = 4 - x^2$ に対し，C 上に 2 点 $\mathrm{P}(-t, 4-t^2)$，$\mathrm{Q}(t, 4-t^2)$ をとる。ただし，$0 < t < 2$ とする。また，C と x 軸との交点で x 座標が負であるものを A とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 APQ の面積 S が最大となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

(2) 線分 PQ と放物線 C で囲まれた部分の面積を T_1 とし，線分 AP と C で囲まれた部分の面積を T_2 とする。$T = T_1 + 2T_2$ が最小となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

〔山梨〕

(1)
$$S = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot(4-t^2) = t(4-t^2) = -t^3 + 4t$$

◀ S を t を用いて表し，3 次関数となることがわかったらそれなりに処理する

$$\frac{d}{dt}S = -3t^2 + 4$$

$0 < t < 2$ の範囲での増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$\frac{d}{dt}S$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって S は $t = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ のとき，

最大値 $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{16}{3\sqrt{3}}}$ をとる。

(2)
$$T_1 = -\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)\,dx$$
$$= -\frac{-1}{6}(2t)^3$$
$$= \frac{4}{3}t^3$$

◀ T_1 を具体的に計算する

$$T_2 = -\int_{-2}^{-t}(x+2)(x+t)\,dx$$
$$= -\frac{-1}{6}(-t+2)^3$$
$$= \frac{1}{6}(-t+2)^3$$

◀ T_2 を具体的に計算する

$$T = T_1 + 2T_2$$
$$= \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3}(-t^3 + 6t^2 - 12t + 8)$$
$$= t^3 + 2t^2 - 4t + \frac{8}{3}$$

◀ T が t の 3 次関数と判断したら，増減表を作成する方針は立てられる

$\frac{d}{dt}T = 3t^2 + 4t - 4 = (t+2)(3t-2)$ から

$0 < t < 2$ の範囲で増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{d}{dt}T$		$-$	0	$+$	
T		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって T は $t = \mathbf{\frac{2}{3}}$ のとき，最小値 $\mathbf{\frac{32}{27}}$ をとる。

◀

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{2}{3} & 1 & 2 & -4 & \frac{8}{3} \\
 & & \frac{2}{3} & \frac{16}{9} & -\frac{40}{27} \\
\hline
 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{20}{9} & \boxed{\frac{32}{27}}
\end{array}$$