33 z^3 と z^2+2iz がともに実数であるような 0 でない複素数 z を求めよ。〔三重〕

a，b を実数とし，$z=a+b\,i$ とする。

$$\begin{aligned} z^3 &= (a+b\,i)^3 \\ &= (a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\,i \end{aligned}$$

左辺が実数のとき $3a^2b-b^3=0 \cdots ①$

$$\begin{aligned} z^2+2\,iz &= (a+b\,i)^2+2\,i\,(a+b\,i) \\ &= (a^2-b^2-2b)+(2ab+2a)\,i \end{aligned}$$

左辺が実数のとき $2ab+2a=0 \cdots ②$

①，② を同時に満たす $(a\,,\,b)$ を求める。

② は $2a\,(b+1)=0$ とでき $a=0$ または $b=-1$

- $a=0$ のとき ① は $-b^3=0$ すなわち $b=0$
  このとき $z=0$ となり適さない。
- $b=-1$ のとき ① は $-3a^2+1=0$
  $a^2=\dfrac{1}{3}$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

したがって $\boldsymbol{z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}-i}$

◀（実数）+（実数）i の形と明示する。（後に実数条件が重要になる）

◀ A，B が実数であり $A+B\,i$ が実数のとき $B=0$

◀ 取り組みやすい（次数の低い）方から，必要条件を引き出していく

34 a，b を正の実数とし，xy 平面上の直線 ℓ : $ax+by-2=0$ を考える。

(1) 直線 ℓ と原点の距離が 2 以上であり，直線 ℓ と直線 $x=1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 (a, b) のとり得る範囲 D を求め，ab 平面上に図示せよ。

(2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲 D を動くとする。このとき，$3a+2b$ を最大にする a，b の値と，$3a+2b$ の最大値を求めよ。〔東北〕

(1) 原点 $(0, 0)$ と直線 ℓ との距離 d は公式から

◀ 点と直線の距離

$$d=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$d \geqq 2$ となるとき $a^2+b^2 \leqq 1 \cdots ①$

次に ℓ の方程式に $x=1$ を代入し $a+by-2=0$，$b \fallingdotseq 0$ から $y=\dfrac{2-a}{b}$

$y \geqq 2$ のとき $\dfrac{2-a}{b} \geqq 2$，$b>0$ から $2-a \geqq 2b$ すなわち

$$b \leqq -\frac{1}{2}a+1 \cdots ②$$

また ①，② の境界 $a^2+b^2=1$ と $2-a=2b$ の交点を求めると

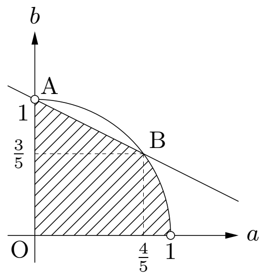
$(2-2b)^2+b^2=1$　を解いて

$5b^2-8b+3=0$

$(b-1)(5b-3)=0$　$(a, b)=(0, 1), \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

A$(0, 1)$，B$\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ とする。

D の範囲は下図の通り



境界は a 軸，b 軸上の点は除き，その他の点は含む

(2) $3a+2b=k \cdots ③$ とする。③ は $b=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{k}{2}$ とでき，傾き $-\dfrac{3}{2}$，b 切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

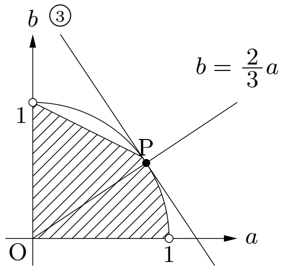
◀ 領域における最大最小
評価関数が 1 次式の基本形

③ が領域 D と共有点をもちながら k を動かすときの k の最大値を考える。

第 1 象限の円弧 $a^2+b^2=1 \cdots ④$ の点 B における接線の傾きは $-\dfrac{1}{(\text{OB の傾き})}=-\dfrac{4}{3}>-\dfrac{3}{2}=$（③ の傾き）から k を最大にする (a, b) は ④ の $\dfrac{4}{5}<a<1$ の部分と，③ との接点である。

その接点を P とすると OP $\perp$ ③ から（OP の傾き）$= \dfrac{2}{3}$ となり，P は ④ と $y = \dfrac{2}{3}x$ の交点から P$\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{13}}},\ \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}}\right)$

最大値は $k = 3\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}} + 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$



35 群に分けられた数列 $\{a_n\}$

$$1, 1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \left| \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right| \frac{1}{16}, \cdots$$

に対し，次の問いに答えよ。ただし，第 k 群について各項は 2^{-k+1} であり，項数は $k + 2^{k-1}$ である。

(1) a_{500} を求めよ。

(2) 第 k 群の項の総和を S_k とする。S_k を k で表し，$\sum_{i=1}^{k} S_i$ を求めよ。

(3) a_1 から a_{2022} までの和を求めよ。〔名古屋市立〕

(1) 第 N 群の末項までの項の総数を T_N とすると

$$T_N = \sum_{k=1}^{N} \left(k + 2^{k-1}\right) = \frac{1}{2}N(N+1) + 2^N - 1 \quad とでき$$

a_{500} は第 1 群に属さない。

$N \geqq 2$ のとき a_{500} が第 N 群に属するならば

$T_{T-1} < 500 \leqq T_N$ 　が成り立つ。

$$T_8 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9 + 2^8 - 1 = 36 + 256 - 1 = 291,$$

$$T_9 = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10 + 2^9 - 1 = 45 + 512 - 1 = 556$$

から a_{500} は第 9 群に属するので $a_{500} = 2^{-9+1} = 2^{-8} = \mathbf{\frac{1}{256}}$

◀ この形の群数列では，第 n 群の末項までの項の総数（または第 n 群の初項までの項の総数）を準備しておくとよい

◀ T_{N-1} を持ち出すとき $N = 1$ とできないので，少し丁寧に記述している。

(2) $S_k = 2^{-k+1} \times \left(k + 2^{k+1}\right) = \mathbf{\frac{k}{2^{k-1}} + 1} \cdots ①$

◀（等差数列）×（等比数列）の形の和

$\sum_{i=1}^{k} S_i = W$ とする。① から

$$W = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \cdots + \frac{k-1}{2^{k-2}} + \frac{k}{2^{k-1}} + k \cdots ②$$

辺々 $\frac{1}{2}$ 倍して

$$\frac{1}{2}W = \qquad \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{k-1}{2^{k-1}} + \frac{k}{2^k} + \frac{1}{2}k \cdots ③$$

② − ③ から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}W &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{k}{2^k} + \frac{1}{2}k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{k}{2^k} + \frac{1}{2}k \\ &= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) - k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}k + 2 - (k+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

$$W = \boldsymbol{k + 4 - (k+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

(3)　(1) の T_N を用いて

$$T_{10} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11 + 2^{10} - 1 = 55 + 1024 - 1 = 1078,$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12 + 2^{11} - 1 = 66 + 2048 - 1 = 2113$$

さらに (2) の S_k を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2022} a_i &= \sum_{i=1}^{1078} a_i + \sum_{i=1079}^{2022} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{10} S_i + 944 \times 2^{-11+1} \\ &= 10 + 4 - 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9 + 944 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= 14 - \frac{3}{2^7} + \frac{118}{2^7} \\ &= \boldsymbol{\frac{1907}{128}}\end{aligned}$$

◀ 第 10 群まではすべての項が対象になっており，第 11 群はすべての項が和の対象となっていない。