29 $t = \sin x + \cos x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin 2x$ を t の式で表せ。

(3) 関数 $y = \sin 2x + a(\sin x + \cos x) + \dfrac{5}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最小値が 0 であるとき，定数 a の値を求めよ。 〔岩手〕

(1) 三角関数の合成を用いて

$$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{とでき}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1 \quad \text{から} \quad \boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

◀ $\sin\theta + \cos\theta$ の合成は定番

◀ 対象の角の範囲を示す（重要）
入試では，「任意の角」でなく制限がつくことが多い

(2) 条件式の両辺を平方して

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$$

したがって $\sin 2x = \boldsymbol{t^2 - 1}$

◀ 加法定理（倍角の公式）から
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
右辺は $(\sin x + \cos x)^2$ を展開したときに出現する

(3) (2) の結果を用いると

$$y = t^2 - 1 + at + \frac{5}{2}$$
$$= t^2 + at + \frac{3}{2}$$
$$= \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{3}{2} \quad \cdots ①$$

◀ t についての 2 次式の最大値を考えるのだから平方完成する。

(1) の結果の範囲で考えて

◀ 定義域に制限がある 2 次式の最大値（最小値）の定番

- $-\dfrac{a}{2} < -1$ すなわち $a > 2$ のとき
  $t = -1$ で最小値をとり
  $$1 - a + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{を解いて} \quad a = \frac{5}{2}$$
  これは $a > 2$ を満たす。

- $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq \sqrt{2}$ すなわち $-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2$ のとき
  $t = -\dfrac{a}{2}$ で最小値をとり
  $$-\frac{a^2}{4} + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{を解いて} \quad a^2 = 6$$
  $-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2$ から $a = -\sqrt{6}$

- $\sqrt{2} < -\dfrac{a}{2}$ すなわち $a < -2\sqrt{2}$ のとき
  $t = \sqrt{2}$ で最小値をとり
  $$2 + \sqrt{2}a + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{を解いて} \quad a = -\frac{7\sqrt{2}}{4}$$
  これは $a < 2\sqrt{2}$ を満たさない。

したがって求める値は $a = \boldsymbol{\frac{5}{2},\ -\sqrt{6}}$

30 三角形 ABC は AB = 6，BC = 10，CA = 9 を満たすとする。角 BAC の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を表しなさい。

(2) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めなさい。

(3) 三角形 ABC の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を表しなさい。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AI}}|$ を求めなさい。〔福島〕

(1) 角の二等分線の性質から BD : DE = AB : AC = 6 : 9 = 2 : 3

D は線分 BC を 2 : 3 に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+3} = \boldsymbol{\frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}}$$

◀ 角の二等分線の性質および分点の位置ベクトル

(2) BC = 10 から $|\vec{c} - \vec{b}| = 10$ であり

$$|\vec{c} - \vec{b}|^2 = 10^2$$

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 100$$

$$81 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 36 = 100$$

したがって $\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{17}{2}}$

◀ 内積は大きさの平方を計算すると出現する

〔別解〕

余弦定理より $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{6^2 + 9^2 - 10^2}{2\cdot 6\cdot 9} = \dfrac{17}{2\cdot 6\cdot 9}$ から

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC} = 6\cdot 9\cdot\frac{17}{2\cdot 6\cdot 9} = \boldsymbol{\frac{17}{2}}$$

◀ 三角形の 3 辺の長さが与えられれば,(すべての頂角の)余弦を計算できる

(3) (1) から $\mathrm{BD} = \dfrac{2}{2+3}\mathrm{BC} = 4$ であり，BI は ∠ABC の二等分線になっているので

AI : ID = BA : BD = 6 : 4 = 3 : 2　となり

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\frac{9\vec{b} + 6\vec{c}}{25}}$$

◀ 内心は，3 つの頂角の二等分線の交点

(4)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 &= \left|\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}\right|^2 \\ &= \frac{1}{25}|3\vec{b}+2\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{25}\left\{9|\vec{b}|^2 + 12\vec{b}\cdot\vec{c} + 4|\vec{c}|^2\right\} \\ &= \frac{1}{25}(324 + 102 + 324) \\ &= 30\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| > 0$ から $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \sqrt{30}$ となり

$$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}| = \frac{3}{5}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{30}}{5}}$$

〔別解〕

角の二等分線の長さの公式から

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \times \mathrm{CD} = 6 \times 9 - 4 \times 6 = 30$$

◀ 角の二等分線の長さの公式

31

(1) $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とする。$\alpha^4+\beta^4$ の値を求めよ。

(2) x^{2022} を x^2-2x+4 で割った余りを求めよ。〔鳥取〕

(1) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$ である。

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot4=-4$$

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\cdot(\alpha\beta)^2\\&=(-4)^2-2\cdot4^2\\&=16-32\\&=\mathbf{-16}\end{aligned}$$

◀ $\alpha^n+\beta^n$ については，漸化式 $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ が有効になることもある。

〔別解〕

α は $x^2-2x+4=0$ の解なので $\alpha^2-2\alpha+4=0$

$\alpha^2=2\alpha-4$　両辺に α^n をかけて

$\alpha^{n+2}=2\alpha^{n+1}-4\alpha^n\cdots①$

同様に

$\beta^{n+2}=2\beta^{n+1}-4\beta^n\cdots②$

① + ② から

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=2(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-4(\alpha^n+\beta^n)$$

$\alpha^n+\beta^n=S_n$ とすることで

$S_{n+2}=2S_{n+1}-4S_n\cdots⊛$　を得る。

初期条件 $S_1=\alpha+\beta=2$，$S_2=\alpha^2+\beta^2=-4$ を準備することで

$$S_3=2S_2-4S_1=2\cdot(-4)-4\cdot2=-16$$

$$S_4=2S_3-4S_2=2\cdot(-16)-4\cdot(-4)=\mathbf{-16}$$

◀ 求めるものは $\alpha^4+\beta^4=S_4$

(2) $(x+2)(x^2-2x+4)=0$ から α は $x^3+8=0$ の虚数解の 1 つである。

したがって $\alpha^3=-8\cdots③$，また改めて $\alpha^2-2\alpha+4=0\cdots④$

x^{2022} を x^2-2x+4 で割り算したときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ (a，b は実数の定数)とすると

◀（余りの次数）<（割る式の次数）

$x^{2022}=(x^2-2x+4)Q(x)+ax+b\cdots⑤$　とでき

③ は恒等式であり，③ に $x=\alpha$ を代入すると

$$\alpha^{2022}=(\alpha^2-2\alpha+4)Q(\alpha)+a\alpha+b$$

$$(\alpha^3)^{674}=0\cdot Q(\alpha)+a\alpha+b\qquad(\because ①, ②)$$

$$8^{674}=a\alpha+b$$

◀ 複素数の相等

α が虚数，a，b は実数から $(a\,, b) = \left(0\,, 8^{674}\right)$ に限る。
したがって，求める余りは $8^{674} = \mathbf{2^{2022}}$

◀ 厳密な証明は背理法

32 $m^2 - mn - 2n^2 = 22$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。〔愛媛〕

条件式は

$$(m+n)(m-2n) = 22 \quad \text{とでき}$$

m，n が自然数より $m+n > m-2m$ かつ $m+n \geqq 2$ から

$$(m+n, m-2n) = (22, 1), (11, 2) \quad \text{に限る。}$$

このときいずれも m，n は自然数を満たし

$$\boldsymbol{(m, n) = (15, 7), (8, 3)}$$

◀ 自然数の積で表し，必要条件を求め，後は総当たりで十分条件を調べる。