26 k を実数とし，整式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$$

で定める。方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x-2$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。 〔九州〕

(1) $f(2)=16+48-4k+4k-64=0$ であり，因数定理から $f(x)$ は $x-2$ で割り切れることが示された。

◀ 因数定理

〔別解〕 実際に $f(x)$ を $x-2$ で割り算し，

商 $x^3+8x^2+(16-k)\,x+32$，余り 0 を得る。

◀

2	1	6	$-k$	$2k$	-64
		2	16	$-2k+32$	64
	1	8	$-k+16$	32	0

(2) (1) から

$$f(x)=(x-2)(x^3+8x^2+(16-k)\,x+32) \quad とできる。$$

$g(x)=x^3+8x^2+(16-k)\,x+32$ とすると，$f(x)=0$ が虚数解をもつので，$g(x)=0$ が虚数解をもつことになる。

したがって，実数係数の 3 次方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解は，実数 α，p，q $(q \neq 0)$ を用いて

$x=\alpha,\, p\pm q\,i$ とできる。解と係数の関係から

◀ 実数係数の 3 次方程式は，少なくとも 1 つの実数解をもつ。
また，虚数が解となるときは，共役な複素数も解となる。

$$\alpha+(p+q\,i)+(p-q\,i)=\alpha+2p=-8 \cdots ①$$

$$\alpha\,(p+q\,i)+(p+q\,i)(p-q\,i)+(p-q\,i)\,\alpha$$
$$=2\alpha p+p^2+q^2=16-k \cdots ②$$

$$\alpha\,(p+q\,i)(p-q\,i)=\alpha\,(p^2+q^2)=-32 \cdots ③$$

③ において $q \neq 0$ から $p^2+q^2>0$ であり，$\alpha<0$ となる。

◀ 〔別解〕中間値の定理（数 Ⅲ）
$f(x)$ は連続で
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$，$f(0)<0$ から
$f(x)=0$ となる $x<0$ が存在する。

$f(x)=0$ の実数解は $x=2,\alpha$ なので，$f(x)=0$ は負の実数解をもつことが示された。

(3) 改めて，$f(x)=0$ の 4 つの解は $x=2,\alpha$，$p\pm q\,i$ である。

①，②，③ で α，p，q がすべて整数となることを考える。

③ から p^2+q^2 が整数となるとき，α は -32 の負の約数となるので $\alpha=-1$, -2, -4, -8, -16, -32 に限る。

◀ 整数問題として必要条件から総当たり

- $\alpha=-1$ のとき ① を満たす整数 p は存在しない
- $\alpha=-2$ のとき ① から $p=-3$，③ から整数 q は存在しない。
- $\alpha=-4$ のとき ① から $p=-2$，③ から $q^2=4$，
  ② より $k=16-(2\alpha p+p^2+q^2)=16-(16+4+4)=-8$

- $\alpha = -8$ のとき ① から $p = 0$，③ から $q^2 = 4$，
  ② より $k = 16 - (2\alpha p + p^2 + q^2) = 16 - (0 + 0 + 4) = 12$
- $\alpha = -16$ のとき ① から $p = 4$，③ から整数 q は存在しない。
- $\alpha = -32$ のとき ① から $p = 12$，③ から整数 q は存在しない。

以上から，$\boldsymbol{k = -8,\ 12}$

$\boxed{27}$ 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2$ に対し，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(p, f(p))$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(3) 点 $(4, k)$ から曲線 C 上の異なる 3 点それぞれに接線が引けるとする。このときの定数 k の値の範囲を求めよ。

〔香川〕

(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x$ から $x = p$ における接線の方程式は

$$y = (3p^2 - 12p)(x - p) + p^3 - 6p^2$$

すなわち $\boldsymbol{y = (3p^2 - 12p)\,x - 2p^3 + 6p^2}$ $\cdots$ ①

◀ 曲線 $y = f(x)$ の $x = p$ における接線の方程式

(2) $f'(x) = 3x(x - 4)$ から増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

したがって $\boldsymbol{x = 0}$ で**極大値 0**，$\boldsymbol{x = 4}$ で**極小値 -32**

◀ 導関数から増減表を作成

(3) C の $x = p$ における接線 ① が，点 $(4, k)$ を通るとき

$$k = 4(3p^2 - 12p) - 2p^3 + 6p^2$$

$$-2p^3 + 18p^2 - 48p = k \quad \cdots ②$$

p に関する 3 次方程式が，異なる 3 つの実数解をもつ k の範囲を考える。② を

$$\begin{cases} y = -2p^3 + 18p^2 - 48p \quad \cdots ③ \\ y = k \quad \cdots ④ \end{cases}$$ とし

③，④ のグラフが異なる 3 つの共有点をもつ k の範囲を求める。

③ について

$$y' = -6p^2 + 36p - 48 = -6(p - 2)(p - 4)$$

増減表は

p	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-40	$\nearrow$	-32	$\searrow$

したがって求める範囲は $\boldsymbol{-40 < k < -32}$

◀ 異なる 3 点に接線が引ける条件（3 次以下では気にしなくてよいが，4 次以上だと問題文に注意する必要がある）

28 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 3a_n + n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2 および a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) a_n および S_n をそれぞれ n の式で表せ。 〔岩手〕

$S_n = 3a_n + n + 1 \cdots ⊛$ とする。

(1) • ⊛ に $n = 1$ を代入する。

$$S_1 = 3a_1 + 1 + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_1 = 3a_1 + 2$$

から $\boldsymbol{a_1 = -1}$

◀ S_n で定義されている数列について $n = 1$ を代入することにより，a_1 についての方程式を得ることができる

• ⊛ に $n = 2$ を代入する。

$$S_2 = 3a_2 + 2 + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_1 + a_2 = 3a_2 + 3$$

から $\boldsymbol{a_2 = -2}$

• ⊛ に $n = 3$ を代入する。

$$S_3 = 3a_3 + 3 + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 3a_3 + 4$$

から $\boldsymbol{a_3 = -\frac{7}{2}}$

(2) ⊛ の n を $n + 1$ に変えて

◀ $n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$S_{n+1} = 3a_{n+1} + (n + 1) + 1 \cdots ①$$

⊛ − ① から

$$S_{n+1} - S_n = 3a_{n+1} - 3a_n + 1$$

$$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n + 1$$

したがって $\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}} \cdots ②$

◀ 隣接 2 項間漸化式（業界用語）を得る

(3) ① の辺々から 1 を引き

$$a_{n+1} - 1 = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}(a_n - 1)$$

これは数列 $\{a_n - 1\}$ が，

初項 $a_1 - 1 = -1 - 1 = -2$，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列となることを表すので $a_n - 1 = -2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

すなわち $\boldsymbol{a_n = -2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$

⊛ に代入し

$$S_n = 3\left\{-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1\right\} + n + 1$$

$$= \boldsymbol{-6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + n + 4}$$

〔別解〕（時間の浪費 !?）

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= -2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= -2\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} + n \\ &= \boldsymbol{-4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + n + 4} \end{aligned}$$

◀ ⊛ に気づかなければ，改めて S_n を計算することになる