23 A，B の二人がそれぞれ 1 個のさいころを 3 回投げ，3 つの出た目を使って 3 桁の自然数をつくる。A は 1 回目に出た目を百の位，2 回目に出た目を十の位，3 回目に出た目を一の位の数として 3 桁の自然数をつくる。B は出た 3 つの目を百の位，十の位，一の位のいずれかとする 3 桁の自然数のうち最大となる数をつくる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) A のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい。

(2) B のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい。

(3) B の 1 回目に出た目が 2 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が 226 より小さくなる確率を求めなさい。

(4) A の 1 回目と 2 回目に出た目がそれぞれ 5 と 4 であり，B の 1 回目に出た目が 4 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が A のつくる 3 桁の自然数より大きくなる確率を求めなさい。

〔福島〕

(1) $6^3 =$ **216** 個

(2) $x \geqq y \geqq z$ のとき $x+2 > y+1 > z$ とでき 1 以上 8 以下の中から異なる 3 個の整数を選び，大きい方から $x+2$，$y+1$，z とすればよいので，求めるものは ${}_8\mathrm{C}_3 =$ **56** 個

◀ $x > y > z$，$x = y > z$，$x > y = z$，$x = y = z$ と場合分けして数えてもよいが，このアイデアは身につけてほしい

(3) 2 回目，3 回目ともに 1 または 2 が出るときに限るので，求める確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$

(4) B のつくる自然数が，A のつくる自然数より大きくなるのは，B に 6 または 5 の目が出ることが必要条件であり，

◀ 必要条件を確認し，(できるだけ排反となる)条件で場合分け

- B の 2 回目，3 回目に少なくとも 1 回 6 の目が出れば，A の 3 回目は何でもよい。

$$\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)\times\frac{6}{6} = \frac{66}{216}$$

◀ 後の和を計算するために，約分しない方がよい

- B の 2 回目，3 回目に 6 の目が出ないとき
  - ○ B の 2 回目，3 回目がともに 5 の目であるとき A の 3 回目は何でもよい。

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{6}{6} = \frac{6}{216}$$

  - ○ B の 2 回目，3 回目が 5 と 4 の目であるとき A の 3 回目は 1, 2, 3 のいずれか。

$$2!\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{3}{6} = \frac{6}{216}$$

  - ○ B の 2 回目，3 回目が 5 と 3 の目であるとき A の 3 回目は

1, 2 のいずれか。

$$2! \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{2}{6} = \frac{4}{216}$$

○ B の 2 回目，3 回目が 5 と 2 の目であるとき A の 3 回目は 1 のみ。

$$2! \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{216}$$

以上の場合しかなく，これらは排反なので求める確率は

$$\frac{66+6+6+4+2}{216} = \frac{84}{216} = \mathbf{\frac{7}{18}}$$

◀ 最終の解答では約分する

24 xy 平面上に中心 $(-3,\ -2)$，半径 $\sqrt{3}$ の円 C と，直線 ℓ : $y=tx+1$ がある。t は実数とする。C と ℓ が異なる 2 点 A，B で交わっており，A，B の x 座標をそれぞれ a，b $(a<b)$ とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $t=\sqrt{2}$ であるとき，C の中心と ℓ の距離を求めなさい。

(2) t のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) 弦 AB の長さが最大となる t の値を求めなさい。

(4) a，b を t を用いてそれぞれ表しなさい。

(5) 弦 AB の長さが 2 となる t の値を求めなさい。　〔岩手県立〕

(1) $t=\sqrt{2}$ のとき ℓ の方程式を $\sqrt{2}x-y+1=0$ とし，$(-3,\ -2)$ との距離は公式を用いて

$$\frac{\left|-3\sqrt{2}+2+1\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

(2) ℓ の方程式を $tx-y+1=0$ とし，円 C の中心から ℓ までの距離を d とする。公式から

$$d=\frac{\left|-3t+2+1\right|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}}=\frac{\left|3t-3\right|}{\sqrt{t^2+1}}\quad \text{であり}$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるのは $d<\sqrt{3}$ となるときなので

◀ 円と直線が交わる条件

$$\frac{\left|3t-3\right|}{\sqrt{t^2+1}}<\sqrt{3}\quad \text{を解く。}$$

$$3\left|t-1\right|<\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+1}$$

◀ 無理式を含んだ不等式を解く

両辺の値は非負なので，平方して比較してよい。

$$9\left|t-1\right|^2<3\left(t^2+1\right)$$

$$3(t-1)^2<t^2+1$$

$$2t^2-6t+2<0$$

$$t^2-3t+1<0\quad (\text{左辺})=0 \text{ を解くと } t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \text{ から}$$

求める t の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

(3) 弦 AB の長さが最大になるのは ℓ が円 C の中心を通るときである。したがって

◀ 円について長さが最大の弦は直径

$$-2=-3t+1\quad \text{を解いて}\ \boldsymbol{t=1}$$

(4) 円 C の方程式は $(x+3)^2+(y+2)^2=3$ であり，$y=tx+1$ を

代入すると

$$(x+3)^2+(tx+1+2)^2=3$$

$$(1+t^2)\,x^2+6\,(1+t)\,x+15=0$$ 解の公式から

$$x=\frac{-3\,(1+t)\pm\sqrt{9(1+t)^2-15\,(1+t^2)}}{1+t^2}$$

$$=\frac{-3\,(1+t)\pm\sqrt{-6\,(t^2-3t+1)}}{1+t^2}$$

(2) の範囲のとき，異なる 2 つの実数解となるので $a<b$ から

$$\boldsymbol{a=\frac{-3\,(1+t)-\sqrt{-6\,(t^2-3t+1)}}{1+t^2}},$$

$$\boldsymbol{b=\frac{-3\,(1+t)+\sqrt{-6\,(t^2-3t+1)}}{1+t^2}}$$

(5)　(2) で求めた d を用いる。円 C の中心を C，弦 AB の中点を M とすると △CAM は ∠CMA = 90° の直角三角形となる。

三平方の定理から

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{CM}^2+\mathrm{AM}^2$$

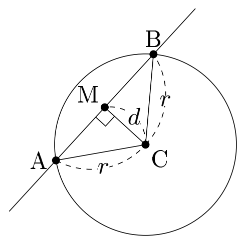
$$\mathrm{CM}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AM}^2$$

$$\left(\frac{|\,3t-3\,|}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2=2$$

$$9(t-1)^2=2\,(t^2+1)$$

$$7t^2-18t+7=0$$ したがって $\boldsymbol{t=\dfrac{9\pm4\sqrt{2}}{7}}$

◀ 円の弦の長さを円の半径と円の中心から弦までの距離から求める常套手段



25 各辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。線分 AB を 3:1 に外分する点を D とし，線分 AC を 2:1 に外分する点を E とするとき，以下の問に答えよ。ただし，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$

で表す。

(1) 点 P は平面 ODE 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ がこの平面に垂直になるとする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) (1) で定めた点 P に対して，線分 AP と平面 OBC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) △OBC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と (2) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

〔宮城教育〕

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{2}$ である。

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(-1)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+(-1)} = \frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2},$$

◀ 分点の位置ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{(-1)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+(-1)} = -\vec{a}+2\vec{c}$$

ここで

◀ 後に必要となる内積の値を準備しておく方が，解答の流れがスムーズにいく。(使用しない値もあるかもしれない)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2\right) = \frac{7}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = 3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{a} + 3\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{3}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = -|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

平面 ODE 上の点 P について，実数 s，t を用いて

◀ 平面上の点の位置ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ ⋯① と表すことができる。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp$ (平面 OED) ⇔ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ から

◀ ベクトルと平面の垂直条件

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$ となるのは

$$(s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$$

$$\frac{7}{4}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} = 0 \cdots ②$$

◀ s と t の方程式で表すようにもっていく(2 本作れば s，t を求めることができるようになる)

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 0$ となるのは

$$(s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 0$$

$$\frac{3}{4}s + 3t = 0 \cdots ③$$

②，③ を解いて $(s,t) = \left(\dfrac{4}{25},\ -\dfrac{1}{25}\right)$

① に代入し

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= \frac{4}{25}\left(\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}\right) - \frac{1}{25}(-\vec{a}+2\vec{c}) - \vec{a}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{26}{25}\vec{a} + \frac{6}{25}\vec{b} - \frac{2}{25}\vec{c}}$$

(2) 点 Q が AP 上にあるとき，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とできる。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$= \left(1 - \frac{26}{25}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{6}{25}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{25}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であり，点 Q が平面 OBC 上にあるとき $1 - \frac{26}{25}k = 0$ から $k = \frac{25}{26}$

◀ ベクトルの相等

したがって $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{25}{26}\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{-\frac{1}{13}(13\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{b}+\vec{\mathrm{C}}}{3}$ であり $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$= \left(\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{13}(13\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})\right)$$
$$= -\frac{1}{39}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(13\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$$
$$= -\frac{1}{39}\left(-39|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 22\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 10\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$
$$= -\frac{1}{39}(-39 - 3 + 1 + 11 - 1 + 5)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$