20 次の問いに答えよ。

(1) 実数を係数とする多項式 $P(x)$ に対して，$P(i)=0$ ならば $P(x)$ は x^2+1 で割り切れることを示せ。ただし i は虚数単位である。

(2) 実数を係数とする多項式 $P(x)$，$Q(x)$ の積 $P(x)Q(x)$ が x^2+1 で割り切れるならば，$P(x)$ と $Q(x)$ の少なくとも一方は x^2+1 で割り切れることを示せ。〔宮城教育〕

(1) 実数係数の多項式 $P(x)$ について，$P(i)=0$ ならば $P\left(\overline{i}\right)=0$

すなわち $P(-i)=0$ となる。因数定理から $P(x)$ は $x-i$, $x+i$ の因数をもつことになる。

したがって $P(x)$ は $(x-i)(x+i)=x^2+1$ で割り切れる。

◀ 実数係数の整方程式が虚数解 α をもつとすると，共役複素数 $\overline{\alpha}$ も，もとの方程式の会となる。

(2) $P(x)Q(x)$ を x^2+1 で割り算したときの商を $A(x)$ とすると

$P(x)Q(x)=(x^2+1)A(x)\ \cdots$① とできて

① は恒等式であり，① に $x=i$ を代入すると

$P(i)Q(i)=0\cdot A(i)=0$

これは $P(i)=0$ または $Q(i)=0$ を表すので，(1) の結果から $P(x)$ と $Q(x)$ の少なくとも一方は x^2+1 で割り切れることが示された。

◀ 複素数の範囲で $AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$ が成り立つ

21 a を $0<a<1$ をみたす実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{1}{6}\log_a(2a)+\log_a\sqrt[3]{7}-\dfrac{1}{2}\log_a\sqrt[3]{98}$ の値を求めなさい。

(2) 不等式 $a^{2x+1}+a \leqq a^{x-1}+a^{x+3}$ をみたす整数 x をすべて求めなさい。

(3) 不等式 $3\log_{a^3}(2x+4) \leqq 2\log_a(4-x)-\log_a 4$ をみたす整数 x をすべて求めなさい。

〔東京都立〕

(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1}{6}\log_a(2a)+\frac{1}{3}\log_a 7-\frac{1}{6}\log_a 98\\ &= \frac{1}{6}\{\log_a(2a)+2\log_a 7-\log_a 98\}\\ &= \frac{1}{6}\{\log_a(2a\times 7^2\div 98)\}\\ &= \frac{1}{6}\log_a a\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

◀ 対数の性質
M，N が正の数，r を実数とする
任意の a $(a>0, a\neq 1)$ に対して
$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$
$\log_a M-\log_a N=\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)$
$\log_a M^r=r\log_a M$

(2) $a^x=A$ とする。$A>0$ であり

$$a^{2x+1}=a^{2x}\cdot a^1=aA^2$$

$$a^{x-1}=\frac{1}{a}A,\quad a^{x+3}=a^3A \quad \text{を用いると}$$

与えられた不等式は

$$aA^2+a\leqq\frac{1}{a}A+a^3A$$

$$a\left\{A^2-\left(\frac{1}{a^2}+a^2\right)A+1\right\}\leqq 0$$

$$a\left(A-\frac{1}{a^2}\right)(A-a^2)\leqq 0$$

$$\left(A-\frac{1}{a^2}\right)(A-a^2)\leqq 0 \qquad (\because\ a>0)$$

$0<a<1$ のとき $a^2<\dfrac{1}{a^2}$ から $a^2\leqq A\leqq\dfrac{1}{a^2}$

すなわち $a^2\leqq a^x\leqq a^{-2}$ であり，底の a は 1 より小さいので

$-2\leqq x\leqq 2$ となり，これをみたす整数は $x=$ **-2，-1，0，1，2**

◀ 指数の底が 1 より小さいときの扱い

(3) 真数条件から $\begin{cases}2x+4>0\\4-x>0\end{cases}$ すなわち $-2<x<4\cdots$①

① の範囲で与えられた不等式について

$$(\text{左辺})=3\cdot\frac{\log_a(2x+4)}{\log_a a^3}=\log_a(2x+4)$$

$$(\text{右辺})=\log_a\frac{(4-x)^2}{4}$$

◀ 対数の方程式，不等式ではまず真数条件を考える

したがって

$$\log_a(2x+4) \leqq \log_a \frac{(4-x)^2}{4}$$

底である a は 1 より小さいので

$$2x+4 \geqq \frac{(4-x)^2}{4} \quad \text{を解く}$$

$$4(2x+4) \geqq (4-x)^2$$

$$x^2-16x \leqq 0$$

$$x(x-16) \leqq 0$$

① との共通範囲は $0 \leqq x < 4$

これをみたす整数は $x=$ **0, 1, 2, 3**

◀ 不等式において，対数の比較を真数の比較と切り替えるときは，底の範囲を明記する

22 座標空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, −1, 2)，B(2, 4, −4)，C(−2, 4, 4) がある。線分 BC を 3:1 に内分する点を D，線分 AC を 2:1 に内分する点を E とする。次の問いに答えなさい。

(1) 線分 AD と線分 BE の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表しなさい。

(2) 2 点 A，D を通る直線に，点 O から垂線を下ろし，直線との交点を H とする。点 H の座標を求めなさい。 〔秋田〕

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ である。

点 P が線分 AD 上にあるとき実数 k $(0\leqq k\leqq 1)$ を用いて

◀ 2 つの直線(線分)の交点の位置ベクトルを求める常套手段

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{AC}\ \cdots ①$$

点 P が線分 BE 上にあるとき実数 t $(0\leqq t\leqq 1)$ を用いて

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{AC}\ \cdots ②$$

①，② において $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立から

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}k=1-t\\[2mm] \dfrac{3}{4}k=\dfrac{2}{3}t\end{cases}\quad を解いて\quad (k,\ t)=\left(\frac{8}{11},\ \frac{9}{11}\right)$$

これは $0\leqq k\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ を満たす。したがって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{2}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}}$$

〔別解〕 **メネラウスの定理**

△ADC と直線 BE にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{AP}{PD}\times\frac{DB}{BC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{AP}{PD}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=1$$

したがって $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{8}{3}$ から $AP:PD=8:3$ となり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{8}{8+3}\overrightarrow{AD}\\ &=\frac{8}{11}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1}\right)\\ &=\boldsymbol{\frac{2}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}}\end{aligned}$$

(2) 点 H が直線 AD 上にあるとき，実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OD}\\ &=(1-u)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}u\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}u\overrightarrow{OC}\end{aligned}\quad とできる。$$

$AD\perp OH$ のとき $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ から

◀ 垂線の足の位置ベクトル

$$(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OH}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として

$$\left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{a}\right)\cdot\left((1-u)\,\vec{a} + \frac{1}{4}u\,\vec{b} + \frac{3}{4}u\,\vec{c}\right) = 0$$

$$(\vec{b} + 3\,\vec{c} - 4\,\vec{a})\cdot(4\,(1-u)\,\vec{a} + u\,\vec{b} + 3u\,\vec{c}) = 0$$

$$(-20,\ 20,\ 0)\cdot(-20u+16,\ 20u-4,\ 8) = 0$$

$$(-1,\ 1,\ 0)\cdot(-5u+4,\ 5u-1,\ 2) = 0$$

◀ 計算しやすいよう適当な数で両辺を割り算した

$-(-5u+4) + (5u-1) + 0 = 0$　を解いて $u = \dfrac{1}{2}$ から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{8}\left(4\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(4\,(4,\ -1,\ 2) + (2,\ 4,\ -4) + 3\,(-2,\ 4,\ 4)\right) \\ &= \frac{1}{8}(12,\ 12,\ 16)\end{aligned}$$

したがって $\mathbf{H}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$