17 座標平面上に原点 O と 2 点 $A(1, 0)$，$B(-1, \sqrt{3})$ がある。線分 AB を 1:2 に内分する点を C とする。また，ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の成分表示をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 P，Q，R があり，それらの位置ベクトルが $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{OR}=u\overrightarrow{e_3}$ であるとする。ただし s，t，u は正の実数である。この 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるとき，u を s と t を用いて表せ。

(3) (2) の 3 点 P，Q，R について，点 R が線分 PQ の中点であるとき，t，u をそれぞれ s で表せ。

〔山梨〕

(1) $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であり

$$\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})=\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2} \cdots ①$$

$$=\frac{2(1, 0)+(-1, \sqrt{3})}{3}$$

$$=\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$|\overrightarrow{OC}|=\frac{2}{3}$ から $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{|\overrightarrow{OC}|}\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

◀ 単位ベクトル → 大きさが 1 のベクトル
$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$（意味を考える）

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1$ から $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OA}$ であり，

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{OR}=\frac{3}{2}u\overrightarrow{OC}$$

s，t，u は 0 でないので

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{s}\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OB}=\frac{2}{t}\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OC}=\frac{2}{3u}\overrightarrow{OR}$$ とでき

① から

◀ $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$$\frac{2}{3u}\overrightarrow{OR}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s}\right)\overrightarrow{OP}+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{t}\right)\overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{3u}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s}\right)\overrightarrow{OP}+\left(\frac{3u}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{t}\right)\overrightarrow{OQ}$$

$$=\frac{u}{s}\overrightarrow{OP}+\frac{u}{t}\overrightarrow{OQ} \cdots ②$$

ここで 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるとき

◀ 3 点が同一直線上にある条件

$$\frac{u}{s}+\frac{u}{t}=1$$

$(s+t)u=st$　$s+t \neq 0$ から $\boldsymbol{u=\frac{st}{s+t}}$ が成り立つ。

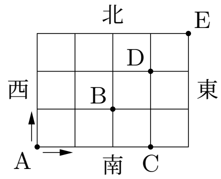
(3) ② において，R が線分 PQ の中点となるのは

◀ 中点の位置ベクトル

$\dfrac{u}{s} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{u}{t} = \dfrac{1}{2}$ から

$$u = \frac{1}{2}s, \quad t = 2u = s \quad \boldsymbol{(t,\ u) = \left(s,\ \frac{1}{2}s\right)}$$

18 右図のような正方形の区画から構成される道路があり，点 A を出発地点とする。「北」,「東」,「その場に留まる」と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚を引き，「北」を引いたら北に向かって 1 区画進み，「東」を引いたら東に向かって 1 区画進み，「その場に留まる」を引いたらその場に留まる。ただし，カードの指示通り移動できない場合にはその場に留まるとする。その後，引いたカードはもとに戻す。この操作を繰り返すとき，次の問に答えよ。



(1) 3 回操作を繰り返したとき，点 B にいる確率を求めよ。

(2) 5 回操作を繰り返したとき，点 C を通って点 D にいる確率を求めよ。

(3) 5 回操作を繰り返したとき，点 B を通らずに点 D にいる確率を求めよ。

(4) 6 回操作を繰り返したとき，点 D にいる確率を求めよ。

(5) 7 回操作を繰り返したとき，点 B，C，D のうち 2 つを通って点 E にいる確率を求めよ。

〔山形〕

(1) 3 回のうち，「東」を 2 回，「北」を 1 回引く確率なので

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\mathbf{\frac{1}{9}} $$

◀ 反復試行の確率の基本形

(2) 5 回の操作で C を通り D にいるのは「東東東北北」の順でカードを引いたときのみなので $\left(\frac{1}{3}\right)^5=\mathbf{\frac{1}{243}}$

(3) 5 回の操作で D にいる確率は ${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{243}$

その中で B を通る確率は

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{6}{243} $$

したがって求める確率は $\frac{10}{243}-\frac{6}{243}=\mathbf{\frac{4}{243}}$

(4) 6 回の操作で D にいるのは「東」を 3 回，「北」を 2 回，「その場に留まる」を 1 回引くときなので

$$ \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{60}{729}=\mathbf{\frac{20}{243}} $$

(5) 7 回の操作で

◀ 重複することも考慮して，各々の場合の数を求める

- B かつ C を通る確率は 0
- B かつ D を通る確率は

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{2187} $$

- C かつ D を通る確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{2}{2187}$$

- B かつ C かつ D を通る確率は 0

求める確率は $\dfrac{12}{2187} + \dfrac{2}{2187} = \boldsymbol{\dfrac{14}{2187}}$

19 放物線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ を C_1 とする。点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における C_1 の接線と P で垂直に交わる直線を ℓ とする。また，ℓ と x 軸との交点を中心とし，点 P を通る円を C_2 とおく。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 円 C_2 の中心と半径を求めよ。

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。〔北海道教育〕

(1) C_1 について，$y'=\sqrt{3}x$ であり $x=1$ のとき $y'=\sqrt{3}$ から ℓ の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。したがって ℓ の方程式は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5\sqrt{3}}{6}}$$

◀ 直交する直線の傾きの関係

(2) ℓ と x 軸の交点の x 座標は $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}=0$ を解いて $x=\dfrac{5}{2}$

したがって C_2 の中心の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{5}{2},\ 0\right)}$ であり

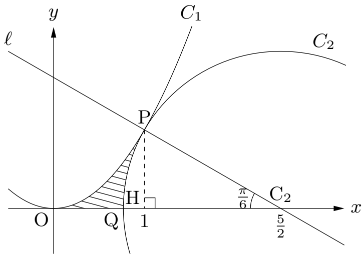
$$(C_2\ の半径)=\sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

◀ 半径は 2 点間の距離
→ 三平方の定理

(3) 求める部分の面積は下図の斜線部分（境界をすべて含む）であり

◀ 面積をどうやって求めるか，図形を見て面積を計算しやすい図形に分ける。

$\mathrm{C_2}$ ： 円 C_2 の中心
Q ：円 C_2 と線分 $\mathrm{OC_2}$ の交点
H ： P から x 軸への垂線の足
$\angle \mathrm{HC_2P}=\dfrac{\pi}{6}$ として



（求める面積）

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\,dx+\triangle \mathrm{C_2PH}-(おうぎ形\ \mathrm{C_2PQ}\ の面積)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3\right]_0^1+\frac{1}{2}\mathrm{HC_2}\times\mathrm{HP}-\pi(\mathrm{C_2P})^2\times\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-1\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi\left(\sqrt{3}\right)^2\times\frac{1}{12}$$

$$=\boldsymbol{\frac{13\sqrt{3}}{24}-\frac{\pi}{4}}$$