14 関数 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ について，次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ について，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2) 曲線 C : $y=f(x)$ について，傾きが 1 である接線の方程式をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた接線のうち，y 軸との交点の y 座標が最大のものを ℓ とする。C と ℓ とで囲まれた部分の面積を求めよ。〔茨城〕

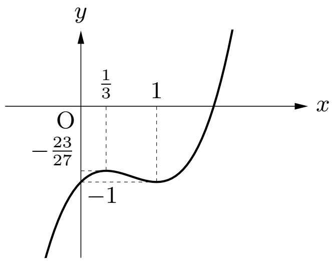
(1) $f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$ から増減表は

◀ 導関数から増減表の作成する

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{23}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

極大値 $-\frac{23}{27}$ $\left(x=\frac{1}{3}\right)$，**極小値 -1** $(x=1)$

◀ 放物線は線対称ということはよく知られているが，3 次関数のグラフが点対称となることはあまり知られていない



(2) $f'(x)=1$ すなわち $3x^2-4x+1=1$ を解いて $x=0,\ \frac{4}{3}$

- $f(0)=-1$ から $x=0$ における接線の方程式は

  $\boldsymbol{y=x-1}$

- $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{23}{27}$ から $x=\frac{4}{3}$ における接線の方程式は

  $y=\left(x-\frac{4}{3}\right)-\frac{23}{27}$ すなわち $\boldsymbol{y=x-\frac{59}{27}}$

◀ 剰余の定理から $f(x)$ を $x-\frac{4}{3}$ で割った余りが $f\left(\frac{4}{3}\right)$

$\frac{4}{3}$	1	-2	1	-1
		$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{4}{27}$
	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{23}{27}$

(3) (2) の結果から ℓ の方程式は $y=x-1$ である。C と ℓ の共有点の x 座標は

$x^3-2x^2+x-1=x-1$ を解いて

$x^3-2x^2=0$

$x^2(x-2)=0$ の解は $x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ では C は ℓ の下方にあるので

$$(\text{求める面積})=\int_0^2\{(x-1)-(x^3-2x^2+x-1)\}\,dx$$

$$=\int_0^2(-x^3+2x^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2$$
$$= -\frac{16}{4} + \frac{16}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

〔参考〕

3 次関数の極値の差

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ で極値をとるとき，極値の差は $\dfrac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3$ となる。

【証明】

α，β は $f'(x) = 0$ すなわち $3ax^2 + 2bx + c = 0$ の 2 解である。

ここで

$$\begin{aligned}
(\text{極値の差}) &= |\,f(\beta) - f(\alpha)\,| \\
&= \left[f(x) \right]_\alpha^\beta \\
&= \left| \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_\alpha^\beta 3a\,(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \right| \\
&= \left| -\frac{3a}{6}(\beta-\alpha)^3 \right| \\
&= \frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

◀ $f(\beta) - f(\alpha)$ を積分の記号を用いて表した

◀ $f'(x) = 3a\,(x-\alpha)(x-\beta)$ とできるところがポイント

◀ いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式

15 不等式 $\sin\theta - \dfrac{\tan\theta}{2} > 0$ を解きなさい。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。〔福島〕

$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ $\cdots$ ① のとき $\cos\theta > 0$ から
与えられた方程式の両辺に $2\cos\theta\,(> 0)$ をかけて

$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta > 0$　とできる。さらに

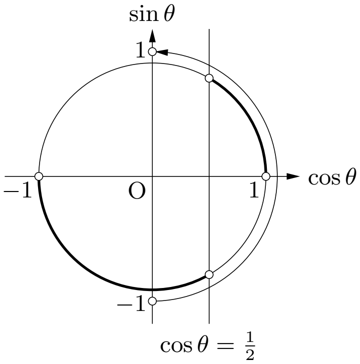
$\sin\theta\,(2\cos\theta - 1) > 0$

◀ 不等式を解くには積をつくる方針

$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \cos\theta > \dfrac{1}{2} \end{cases}$　または　$\begin{cases} \sin\theta < 0 \\ \cos\theta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

◀ 場合分けしなくても積領域の考え方ができることが望ましい

① の範囲で $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2} < \theta < -\dfrac{\pi}{3},\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}}$



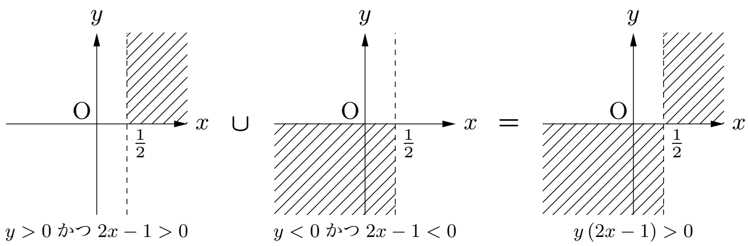
〔参考〕

（$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$ と考えて）

$y\,(2x - 1) > 0$

を図示すると

◀ 図示された範囲内での $x^2 + y^2 = 1$ となるものが (x, y) すなわち $(\cos\theta, \sin\theta)$



16 座標平面上の放物線 $y=-x^2+(a-4)x+2a-8$ を C とし，点 $(-2,0)$ を通る直線 L_1 と放物線 C が点 P で接するとする。ただし，点 P の x 座標は 0 以上である。$a \fallingdotseq 4$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 L_1 の方程式を a を用いて表せ。

(3) 点 P を通り，直線 L_1 に垂直な直線 L_2 の方程式を a を用いて表せ。

(4) 放物線 C と直線 L_2 の交点で，点 P と異なる点を Q とするとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(5) $a>4$ のとき，放物線 C と直線 L_2 に囲まれた図形の面積を a を用いて表せ。〔山形〕

(1) C について，$y'=-2x+a-4$ であり
C の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+a-4)(x-t)-t^2+(a-4)t+2a-8$$
$$=(-2t+a-4)x+t^2+2a-8 \cdots ①$$

① が点 $(-2,0)$ を通るとき

$$0=-2(-2t+a-4)+t^2+2a-8$$
$$t^2+4t=0$$

$t \geqq 0$ のとき $t=0$ したがって P の座標は P$\boldsymbol{(0, 2a-8)}$

◀ 曲線 C 上の点 P における接線の方程式

(2) L_1 の方程式は ① に $t=0$ を代入して

$$\boldsymbol{y=(a-4)x+2a-8}$$

(3) $a \fallingdotseq 4$ から L_2 の傾きは $-\dfrac{1}{a-4}$ となるので，L_2 の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{a-4}x+2a-8}$$

◀ 傾きと通過する点が与えられたときの直線の方程式

(4) $-x^2+(a-4)x+2a-8=-\dfrac{1}{a-4}x+2a-8$ を解く。
$x \fallingdotseq 0$ のとき両辺を x で割り $x=a-4+\dfrac{1}{a-4}$
これが点 Q の x 座標になるので

$$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{a-4+\frac{1}{a-4}, 2a-9-\frac{1}{(a-4)^2}}\right)$$

(5) $q=a-4+\dfrac{1}{a-4}$ とする。$a>4$ のとき $q>0$ であり，求める面積を S とすると

◀ 積分を簡潔に記述するため置きかえてある

$$S=\int_0^q\left\{(-x^2+(a-4)x+2a-8)-\left(-\frac{1}{a-4}x+2a-8\right)\right\}dx$$
$$=-\int_0^q x(x-q)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}q^3$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}\left(a-4+\frac{1}{a-4}\right)^3}$$

◀ （難関大）入試では，この後 q の最小値を求めるに続くことが多い