11 不等式 $8^x - 4^{x+1} + 2^x + 6 > 0$ を解け。 〔会津〕

$2^x = t$ とする。$t > 0$ であり

$$8^x = \left(2^3\right)^x = 2^{x3} = t^3$$

$$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4t^2 \quad \text{から}$$

与えられた不等式は

$$t^3 - 4t^2 + t + 6 > 0$$

$$(t+1)(t^2 - 5t + 6) > 0$$

$$(t+1)(t-2)(t-3) > 0$$

$t > 0$ との共通範囲は $0 < t < 2,\ 3 < t$

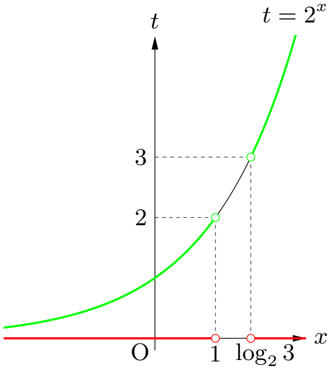
$$0 < 2^x < 2,\ 3 < 2^x$$

底の 2 は 1 より大きいので $\boldsymbol{x < 1,\ \log_2 3 < x}$

◀ 置き換えを行うことで，3 次不等式とできることを見抜く

◀
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

〔参考〕グラフによる不等式の解の明示



12 次の方程式を複素数の範囲で解きなさい。

$(x^2+2x+1)(x^2+2x+9)+12=0$ 〔福島〕

$x^2+2x=t$ とする。

与えられた方程式は $(t+1)(t+9)+12=0$ とできて

$$t^2+10t+21=0$$

$$(t+3)(t+7)=0$$

$$(x^2+2x+3)(x^2+2x+7)=0$$

したがって $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}\,i,\ -1\pm\sqrt{6}\,i}$

◀ 類似する項を見つけて置き換える

◀ 次数を下げて因数分解しやすくする

◀ 2 次方程式ならば解ける

〔参考〕

$x\,(x-1)(x-2)(x-3)+1=0$ の解を求めよ。

〔早稲田大・人間科学部（数学選抜）〕

$x\,(x-3)(x-1)(x-2)+1=0$ とし，

$$(x^2-3x)(x^2-3x+2)+1=0$$

$x^2-3x=t$ として

$$t\,(t+2)+1=0$$

$$t^2+2t+1=0$$

$$(t+1)^2=0$$

$$t+1=0$$

$x^2-3x+1=0$ 解の公式から $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

13 座標空間の原点を O とし，3 点 A (2, 2, −2)，B (2, −2, 2)，C (−2, 2, 2) をとる。線分 AB を 3 : 1 に内分する点を D，線分 AC を 3 : 1 に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D，E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。 〔新潟〕

(1) 分点の公式を用いて

◀ ベクトルの分点の公式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}\\ &= \frac{(2,\ 2,\ -2) + 3\,(2,\ -2,\ 2)}{4}\\ &= (2,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+(-1)}\\ &= \frac{-(2,\ 2,\ -2) + 3\,(-2,\ 2,\ 2)}{2}\\ &= (-4,\ 2,\ 4)\end{aligned}$$

したがって **D (2, −1, 1)，E (−4, 2, 4)**

(2) 点 F が直線 DE 上にあるとき，実数 t を用いて

◀ 直線上の点であることの表現

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\ &= (1-t)\,(2,\ -1,\ 1) + t\,(-4,\ 2,\ 4)\\ &= (-6t+2,\ 3t-1,\ 3t+1) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

とできる。

このとき

◀ 成分によるベクトルの大きさの表現

$$\begin{aligned}|\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}\,| &= \sqrt{(-6t+2)^2 + (3t-1)^2 + (3t+1)^2}\\ &= \sqrt{54t^2 - 24t + 6}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= (-2,\ 2,\ 2) - (2,\ -2,\ 2)\\ &= (-4,\ 4,\ 0) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

同様に

$$|\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,| = 4\sqrt{2}$$

ここで ①，② から

◀ 内積の定義

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -4\,(-6t+2) + 4\,(3t-1) + 0 = 36t - 12$$

そして $\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}\,||\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,|\cos\theta$ より

$$36t - 12 = \sqrt{54t^2 - 24t + 6}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

を解く。

◀ 成分による内積計算

辺々 12 で割り

$$3t-1=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\quad\cdots③$$

$$2\sqrt{7}\,(3t-1)=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}$$

◀ 次に平方したとき，大きな数にならないよう，工夫して分母の有理化を施してある。(どうしてもしなければならないわけではない)

辺々平方し

$$28(3t-1)^2=(54t^2-24t+6)\cdot 2$$

$$7\,(9t^2-6t+1)=27t^2-12t+3$$

$$36t^2-30t+4=0$$

$$18t^2-15t+2=0$$

$$(3t-2)(6t-1)=0$$

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}$$

このうち ③ の解は $t=\dfrac{2}{3}$ のみなので ① から **F (−2, 1, 3)**

◀ 途中両辺を平方するところで，同値関係が崩れているので，ここでの解(必要条件)を ③ に戻して確認する。
実際は ③ の（右辺）> 0 なので（左辺）> 0 であれば，平方した方程式も同値