7 方程式 $\log_2|x^2-3x+2|+\log_2|x^2-5x+6|=2\log_2(x-2)$ を解け。　〔山梨〕

真数条件から

$|x^2-3x+2|>0$ は $|(x-1)(x-2)|>0$ から $x \neq 1$ かつ $x \neq 2$

$|x^2-5x+6|>0$ は $|(x-2)(x-3)|>0$ から $x \neq 2$ かつ $x \neq 3$

$x-2>0$ から $x>2$

したがって $2<x<3,\ 3<x \cdots$ ① の範囲で考える。

◀ それぞれの対数について（真数）>0

$$\log_2|(x-1)(x-2)||(x-2)(x-3)|=\log_2(x-2)^2$$

$$\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)\right|=(x-2)^2$$ を解く

両辺 $(x-2)^2 \neq 0$ で割り

$$|(x-1)(x-3)|=1$$

◀ $|X|=1 \Leftrightarrow X=\pm 1$

- $(x-1)(x-3)=1$ のとき

  $x^2-4x+2=0$　解の公式から $x=2\pm\sqrt{2}$

  ① から $x=2+\sqrt{2}$

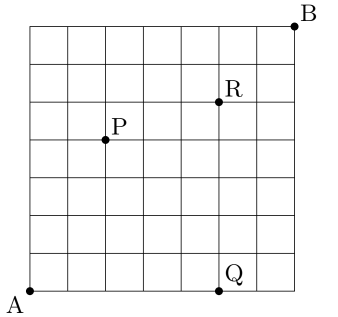
- $(x-1)(x-3)=-1$ のとき

  $x^2-4x+4=0$　$(x-2)^2=0$

  $x=2$ は ① を満たさない。

したがって $\boldsymbol{x=2+\sqrt{2}}$

8 ある公園には右の図の線で示されているような歩道が造られている。また，この公園内には図の P，Q，R の 3 地点だけに水飲み場が設置されている。このとき次の問いに答えよ。



(1) A 地点から歩道を通って B 地点に至る最短の経路のうち，P 地点の水飲み場を通るものは何通りあるか。

(2) A 地点から歩道を通って B 地点に至る最短の経路のうち，水飲み場を 1 回以上通るものは通るものは何通りあるか。〔岩手〕

(1) A から P に至る最短経路は $\dfrac{6!}{2!4!}=15$ 通り，
P から B に至る最短経路は $\dfrac{8!}{5!3!}=56$ 通りなので
求めるものは $15\times 56=$ **840** 通り

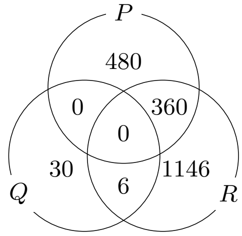
◀ a を p 個，b を q 個並べる並べ方は ${}_{p+q}\mathrm{C}_p={}_{p+q}\mathrm{C}_q=\dfrac{(p+q)!}{p!q!}$ 適宜用いる

(2)
- P を通る　　840 通り
- Q を通る　$\dfrac{5!}{5!0!}\times\dfrac{9!}{2!7!}=1\times 36$　　36 通り
- R を通る　$\dfrac{10!}{5!5!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=252\times 6$　　1512 通り
- P かつ Q を通る　　0 通り
- P かつ R を通る　$\dfrac{6!}{2!4}\times\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=15\times 4\times 6$
360 通り
- Q かつ R を通る　$\dfrac{5!}{5!0!}\times\dfrac{5!}{0!5!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=1\times 1\times 6$
6 通り
- P かつ Q かつ R を通る　　0 通り

求める最短経路の数は
$$(840+36+1512)-(0+360+6)+0=\textbf{2022}\text{ 通り}$$

◀ 包除原理

〔参考〕



9 平面上の 2 点 A$(-2, -2)$，B$(1, -4)$ と円 $x^2-2x+y^2-2y-2=0$ 上の点 P を頂点とする△ABP を考える。P が円周上を動いたとき △ABP の重心 G の軌跡を求めよ。〔三重〕

P(a, b)，G(x, y) とする。

点 P が円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4\cdots$㊅ 上にあるとき

$$(a-1)^2+(b-1)^2=4\cdots①$$

G は △ABP の重心であるから

$$x=\frac{-2+1+a}{3}=\frac{a-1}{3}\cdots②$$

$$y=\frac{-2-4+b}{3}=\frac{b-6}{3}\cdots③$$

②，③ から $a=3x+1$，$b=3y+6$ を ① に代入し

$$(3x+1-1)^2+(3y+6-1)^2=4$$

辺々 9 で割り

$$x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\cdots④$$

また，直線 AB の方程式は $y=-\frac{2}{3}(x+2)-2$ すなわち

$2x+3y+10=0\cdots⑤$　とでき

円 ㊅ の中心 $(1, 1)$ から直線 ⑤ までの距離 d は公式から

$$d=\frac{|2+3+10|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{13}}$$

そして

$$\frac{15}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{13}}>\frac{\sqrt{221}}{\sqrt{13}}=\sqrt{17}>4\quad\text{から}$$

$d>$ (㊅ の半径)

となり，P は ㊅ 上を動くとき，常に △ABP が存在するので ④ から除く点はない。

したがって G の軌跡は　**中心 $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$，半径 $\frac{2}{3}$ の円**

◀ 軌跡を求める点の座標を (x, y) としておくと目標を定めやすい。

◀ 補助の変数(媒介変数) a，b を消去し x，y の(関係)式を作る。

◀ 今回は(結果として)得られた方程式から除く点がなかったが，満点の答案を目指すのなら吟味は必要
(図で示せるかもしれないが数値の裏付けがないと説得力に欠ける!?)

10 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。〔愛媛〕

解と係数の関係から $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=4$ であり

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=3^3-3\cdot4\cdot3\\&=27-36\\&=\mathbf{-9}\end{aligned}$$

◀ α，β を 2 解とする 2 次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

すなわち

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$