4 円 $x^2+y^2-10x-2ay+a^2+21=0$ $(0<a<2)$ $\cdots$① と直線 $y=2x+1$ $\cdots$② がある。円①の中心を C とし，点 C と直線②の距離が $2\sqrt{5}$ であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) a の値を定め，円①の中心 C の座標と半径を求めなさい。

(2) 直線②に関して円①と対称な円の中心 D の座標を求めなさい。

(3) 点 A$(3,-3)$ とする。点 P が直線②の上を動き，点 Q が①の円周上を動くとき，2 つの線分の長さの和 AP＋PQ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めなさい。〔長崎県立〕

(1) ①は $(x-5)^2+(y-a)^2=4$ とできる。中心 C の座標は $(5, a)$ であり，②を $2x-y+1=0$ とし，点 C と直線②との距離は公式から

$$\frac{|10-a+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5} \quad を解く。$$

$$|-a+11|=10$$

$$|a-11|=10 \quad すなわち\ a-11=\pm 10$$

$0<a<2$ から $\boldsymbol{a=1}$，したがって **C(5, 1)**，①の半径は **2**

◀ 点と直線の距離の公式
点 (x, y) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◀ $|X|=|-X|$
$|X|=c$（正の定数）
$\Leftrightarrow X=\pm c$

(2) C から②に引いた垂線の方程式は
$y=-\dfrac{1}{2}(x-5)+1=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$ $\cdots$③ であり，②と③の交点を H とすると

$$2x+1=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \quad を解いて\ x=1\ から\ \mathrm{H}(1,3)$$

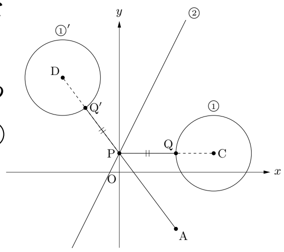
H は線分 CD の中点となるので $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-3,5)$ すなわち **D(−3, 5)**

◀ 直線について対称な点を求める

◀ D は AH を 2:1 に**外分**する点とする方が大人の解答であるが，順序を間違えると悲しいことになるので，順序を問わない中点から求めた。

(3) 直線②に関して①と対称な円を①′ とする。



円①上の点 Q に対して，②について対称な点 Q′ を考えると，P が②上の点であるとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}&=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ'}\\&=\mathrm{AP}+\mathrm{PD}-\mathrm{DQ'}\\&=\mathrm{AP}+\mathrm{PD}-2\end{aligned}$$

右辺が最小となるのは
3 点 A，P，D が一直線に並ぶときであり，
A$(3,-3)$，D$(-3,5)$ から**最小値**は AD − DQ′ $=10-2=$ **8**
直線 AD の方程式は

$$y=-\frac{8}{6}(x-3)-3=-\frac{4}{3}x+1 \cdots ④$$

◀ 対称点を考えるのは，最短距離を考えるときの常套手段

④ と ② の交点が P となるので **P (0 , 1)**

5 $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，θ に関する方程式

$$2\cos\theta - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\frac{\theta}{2} + 2 - \sqrt{3} = 0$$

を解け。〔宮城教育〕

$\cos\frac{\theta}{2} = t$ とする。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき $0 \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \pi \cdots$ ① から

$-1 \leqq t \leqq 1 \cdots$ ②　である。

また，$\cos\theta = \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2t^2 - 1$ を用いると，与えられた方程式は

$2\left(2t^2-1\right) - 2\left(\sqrt{3}-1\right)t + 2 - \sqrt{3} = 0$　とでき

$4t^2 - 2\left(\sqrt{3}-1\right)t - \sqrt{3} = 0$

$(2t+1)\left(2t-\sqrt{3}\right) = 0$

② の範囲で $t = -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

① の範囲で $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi$

したがって $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi}$

◀ 置き換えを行った場合，とり得る値の範囲を示しておく

◀ 有名角の三角比はすぐに対応できるようにする。

6 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15$ および

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{5} - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたす数列とする。

(1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ。 〔北海道〕

(1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{5} - 2$ であり

- $n < 10$ のとき $a_{n+1} - a_n < 0$
- $n = 10$ のとき $a_{n+1} - a_n = 0$
- $n > 10$ のとき $a_{n+1} - a_n > 0$

から $\{a_n\}$ は

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_9 > a_{10} = a_{11} < a_{12} < a_{13} < \cdots$$

となるので，a_n を最小とする n は $\boldsymbol{n = 10,\ 11}$

◀ 階差数列の符号(正負)は，もとの数列の増減を表していると考える。

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= -15 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{5} - 2 \right) \\ &= -15 + \frac{1}{2}(n-1)\left\{ -\frac{9}{5} + \left(\frac{n-1}{5} - 2 \right) \right\} \\ &= -15 + \frac{1}{10}(n-1)(n-20) \\ &= \frac{1}{10}(n^2 - 21n - 130) \\ &= \frac{1}{10}(n+5)(n-26) \end{aligned}$$

これは $a_1 = -15$ を満たす。

したがって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{10}(n+5)(n-26)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ とする。(2) の結果から

- $2 \leqq n < 26$ のとき $a_n < 0$ から

  $$S_{n-1} > S_n$$

- $n = 26$ のとき $a_{26} = 0$ から

  $$S_{25} = S_{26}$$

◀ $S_{n+1} - S_n$ の符号が正のとき，$\{S_n\}$ は増加する。

- $26 < n$ のとき $a_n > 0$ から

$$S_{n-1} < S_n$$

となり，$\{S_n\}$ について

$$S_1 > S_2 > \cdots > S_{25} = S_{26} < S_{27} < S_{28} < \cdots$$

となるので S_n を最小にするのは $\boldsymbol{n = 25,\ 26}$