1 方程式

$$(2m+n)(n+1)=132$$

を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。 〔富山〕

$132=2^2\times3\times11$ であり，$2m+n$ と $n+1$ については，一方が奇数で他方は偶数となり，$2m+n>n+1>1$ から

$$(2m+n, n+1)=(44, 3), (33, 4), (12, 11)$$ に限る。

したがって $\boldsymbol{(m, n)=(21, 2), (15, 3), (1, 10)}$

◀ $2m+n$ と $n+1$ の必要条件をどこまで考えるか

2 a を正の実数とし，xy 平面上の放物線 $C: y=x^2$ の上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ で C に接する接線を ℓ，点 A を通り ℓ に直交する直線を ℓ' とする。また，直線 ℓ' と放物線 C との交点で A と異なる点を $\mathrm{P}(s, s^2)$ とする。

(1) 直線 ℓ' の方程式を求め，a を用いて s を表せ。

(2) 放物線 C と x 軸，および直線 $x=s$ で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小になる a の値と，$S(a)$ の最小値を求めよ。〔東北〕

(1) C について $y'=2x$ から $x=a$ のとき $y'=2a \neq 0$ であり，ℓ' の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ となり，ℓ' の方程式は

$$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$$

◀ 点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線の方程式は $y=m(x-x_1)+y_1$

C と ℓ' の共有点の x 座標は

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2 \quad \text{を解く}$$

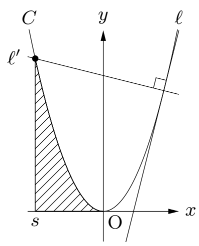
$$x^2+\frac{1}{2a}x-\frac{1}{2}-a^2=0$$

◀ この方程式の解の 1 つは $x=a$ である

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

$s \neq a$ から $s=\boldsymbol{-a-\dfrac{1}{2a}}$

(2) $a>0$ のとき，$s<0$ から

◀ 

$$S(a)=\int_s^0 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_s^0=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2a}\right)^3$$

$S(a)$ が最小値なるのは $a+\dfrac{1}{2a}$ が最小となるときであり，

$a>0$，$\dfrac{1}{2a}>0$ から相加相乗平均の関係を用いると

$$a+\frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2a}}=\sqrt{2}$$

等号が成立するのは $a=\dfrac{1}{2a}$ かつ $a>0$

◀ 積が定数である 2 つの正の数の和の最小値は相加・相乗平均

すなわち $a=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき $S(a)$ の最小値は $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

3 空間に 4 点 O，A，B，C があり

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3}$$

を満たしているとする。三角形 ABC の外接円の面積を求めよ。〔小樽商科〕

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\ &= 1^2 - 2\cdot\frac{2}{3} + 1^2\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| > 0$ から $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$，同様に $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

◀ 外接円の面積を求める
→ （外接）円の半径 R を求める
→ 3 辺の長さを求める

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= 1^2 - 2\cdot\frac{3}{5} + 1^2\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| > 0$ から $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

さらに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\ &= \frac{3}{5} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 1^2\\ &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

であり

◀ 一般に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|} = \frac{\frac{4}{15}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}$$

$\sin\angle\mathrm{ACB} > 0$ から

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{ACB} &= \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{ACB}}\\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{21}{25}}\\ &= \frac{\sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

△ACB の外接円の半径を R とし，正弦定理を用いて

$\mathrm{AB} = 2R\sin\angle\mathrm{ACB}$　から

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = 2R \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \quad \text{したがって}\ R = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5}{21}}$$

求める外接円の面積は $\pi R^2 = \boldsymbol{\frac{5}{21}\pi}$

〔別解〕

3 辺の長さを求める過程でベクトルでなく余弦定理を用いる方法

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{\frac{3}{5}}{1\cdot 1} = \frac{3}{5}$$

◀ やっていることは，ベクトルの大きさを平方して計算していることと変わりない

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{3}{5}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ から $\mathrm{AB} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

同様に $\mathrm{BC}^2 = 1 + 1 - 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$，$\mathrm{CA}^2 = 1 + 1 - 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ から

$\mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \sqrt{\frac{2}{3}}$