# 3 次関数

**1** $a$，$b$ を 0 でない定数とし，

$$f(x) = (x+a)(x-3a)\,,\quad g(x) = b\,(x-3a)$$

とする。3 次関数 $F(x)$ は $F(0)=0$ と $F'(x)=f(x)$ を満たし，2 次関数 $G(x)$ は $G'(x)=g(x)$ を満たす。ただし，放物線 $y=G(x)$ の頂点 $(\,x_0\,,\,y_0\,)$ に対して，関数 $F(x)$ は $x=x_0$ で極値 $y_0$ をとるものとする。

(1) 関数 $F(x)$ を求めなさい。

(2) 関数 $G(x)$ を求めなさい。

(3) 2 つの曲線 $y=F(x)$ と $y=G(x)$ の共有点が 1 個となるとき，$b$ を $a$ を用いて表しなさい。

〔大分大学 2022〕

(1) $f(x)=x^2-2ax-3a^2$ であり，$F'(x)=f(x)$ から

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x+C_1\ (C_1 \text{ は定数})$$ とでき

$F(0)=0$ から $C_1=0$ となり $\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x}$

(2) $G'(x)=g(x)$ から $G(x)=\displaystyle\int g(x)\,dx=\frac{1}{2}bx^2-3abx+C_2 \cdots$ ①（$C_2$ は定数）とできる。

$$y=G(x)=\frac{1}{2}b(x-3a)^2-\frac{9}{2}a^2b+C_2$$ の頂点 $(\,x_0\,,\,y_0\,)$ は $\left(3a\,,\,-\frac{9}{2}a^2b+C_2\right)$ となる。

他方 $F(x)$ について $F'(x)=(x+a)(x-3a)$ であり，$a \fallingdotseq 0$ のとき，$-a \fallingdotseq 3a$ から $F(x)$ は極値をもつ。

$x_0=3a$ から $y_0=F(3a)$ すなわち

$$-\frac{9}{2}a^2b+C_2=9a^3-9a^3-9a^3=-9a^3$$ から $C_2=-9a^3+\frac{9}{2}a^2b$ を ① に代入して

$$\boldsymbol{G(x)=\frac{1}{2}bx^2-3abx-9a^3+\frac{9}{2}a^2b}$$

(3) 2 つの曲線の共有点の $x$ 座標は $F(x)=G(x)$ すなわち

$$\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x=\frac{1}{2}bx^2-3abx-9a^3+\frac{9}{2}a^2b$$ を解く。辺々 6 倍して

$$2x^3-6ax^2-18a^2x=3bx^2-18abx-54a^3+27a^2b$$

$$2x^3-3\,(2a+b)\,x^2-18a\,(a-b)\,x+27a^2\,(2a-b)=0$$

$F(x)=G(x)$ は $x=3a$ を重解にもつことを考慮して左辺は次のように因数分解できる。

$$(x-3a)^2\,(2x+3\,(2a-b))=0$$

この方程式の解は $x=3a$，$-\frac{3}{2}\,(2a-b)$ となり，ただ 1 つの実数解をもつとき

$$3a=-\frac{3}{2}\,(2a-b)$$ すなわち $6a=-3\,(2a-b)$ から $\boldsymbol{b=4a}$

# 3 次関数

**2** 座標平面上の曲線 $y=x^3-4x^2-4$ を $C$ とする。曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{A}(4,-4)$ を通り，傾きが $k$ の直線を $\ell$ とする。曲線 $C$ と直線 $\ell$ が点 A の他に相違なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 P，Q における曲線 $C$ の接線をそれぞれ $\ell_{\mathrm{P}}$，$\ell_{\mathrm{Q}}$ とする。$k$ が (1) の範囲にあるとき，接線 $\ell_p$ と $\ell_{\mathrm{Q}}$ の交点が描く曲線の方程式を求めよ。

(3) (2) の曲線と $x$ 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。 〔熊本大 2022〕

(1) $\ell$ の方程式を $y=k(x-4)-4$ すなわち $y=kx-4k-4$ とする。曲線 $C$ と $\ell$ との共有点の $x$ 座標は

方程式 $x^3-4x^2-4=kx-4k-4$ の実数解である。

$$x^3-4x^2-kx+4k=0$$

$$(x-4)(x^2-k)=0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | $-4$ | $-k$ | $4k$ |
| | | 4 | 0 | $-4k$ |
| | 1 | 0 | $-k$ | 0 |

$C$ と $\ell$ が A 以外の相違なる 2 つの共有点 P，Q をもつのは 2 次方程式 $x^2-k=0$ が $x=4$ 以外の異なる 2 つの実数解をもつことから

$k>0$ かつ $4^2-k\neq 0$ したがって $\boldsymbol{0<k<16,\ 16<k}$

(2) P，Q の座標をそれぞれ $(p,p^3-4p^2-4)$，$(q,q^3-4q^2-4)$ とする。解と係数の関係から

$p+q=0\cdots$①，$pq=-k\cdots$② である。

$C$ について $y'=3x^2-8x$ から $\ell_{\mathrm{P}}$ の方程式は

$y=(3p^2-8p)(x-p)+p^3-4p^2-4$ すなわち $y=(3p^2-8p)x-2p^3+4p^2-4\cdots$③

同様に $\ell_{\mathrm{Q}}$ の方程式は $y=(3q^2-8q)x-2q^3+4q^2-4\cdots$④

$\ell_{\mathrm{P}}$ と $\ell_{\mathrm{Q}}$ の交点を R とすると R の $x$ 座標は

$(3p^2-8p)x-2p^3+4p^2-4=(3q^2-8q)x-2q^3+4q^2-4$ を解く

$$(3(p^2-q^2)-8(p-q))x=2(p^3-q^3)-4(p^2-q^2)$$

$p\neq q$ から，両辺を $p-q\ (\neq 0)$ で割ることができ

$$(3(p+q)-8)x=2(p^2+pq+q^2)-4(p+q)\ \cdots⑤$$

①，② さらに $p^2=q^2=k$ を用い，$p<q$ としても一般性を失わないので $p=-\sqrt{k}$，$q=\sqrt{k}$ となる。

⑤ は $-8x=2k$ となり $x=-\frac{1}{4}k$ を ③ に代入すると

$$y=\left(3k+8\sqrt{k}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}k\right)+2k\sqrt{k}+4k-4=-\frac{3}{4}k^2+4k-4$$

したがって $\mathrm{R}(x,y)$ とすると $x=-\frac{1}{4}k\cdots$⑥，$y=-\frac{3}{4}k^2+4k-4\cdots$⑦ であり

⑥ から $k=-4x$ を ⑦ に代入し

$$y=-\frac{3}{4}\cdot(-4x)^2+4\cdot(-4x)-4=-12x^2-16x-4$$

また (1) から求める軌跡は $\boldsymbol{y = -12x^2 - 16x - 4 \ (x < -4,\ -4 < x < 0)}$

(3) (2) で求めた軌跡と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は

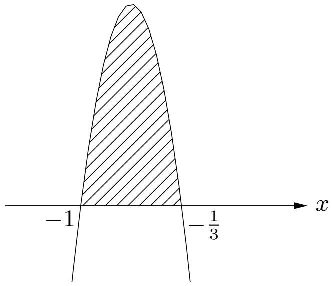
$-12x^2 - 16x - 4 = 0$ を解いて

$3x^2 + 4x + 1 = 0$

$(x+1)(3x+1) = 0$ から $x = -1,\ -\dfrac{1}{3}$

これは (2) で求めた定義域内に含まれる。

したがって求める面積は $-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{3}$ において $y \geqq 0$ から




$$\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (-12x^2 - 16x - 4)\, dx = -12\int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= -\frac{-12}{6}\left(-\frac{1}{3} - (-1)\right)^3$$

$$= \boldsymbol{\frac{16}{27}}$$

〔別解〕(2) 解と係数の関係を用いないで

P の $x$ 座標を $-\sqrt{k}$, Q の $x$ 座標を $\sqrt{k}$ としても一般性を失わない。このとき P$\left(-\sqrt{k},\ -k\sqrt{k} - 4k - 4\right)$, Q$\left(\sqrt{k},\ k\sqrt{k} - 4k - 4\right)$ であり，$C$ について $y' = 3x^2 - 8x$ から

$\ell_p$ の方程式は $y = \left(3k + 8\sqrt{k}\right)\left(x + \sqrt{k}\right) - k\sqrt{k} - 4k - 4 = \left(3k + 8\sqrt{k}\right)x + 2k\sqrt{k} + 4k - 4$

$\ell_q$ の方程式は $y = \left(3k - 8\sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) + k\sqrt{k} - 4k - 4 = \left(3k - 8\sqrt{k}\right)x - 2k\sqrt{k} + 4k - 4$

$\ell_p$ と $\ell_q$ の交点を R とすると R の $x$ 座標は

$\left(3k + 8\sqrt{k}\right)x + 2k\sqrt{k} + 4k - 4 = \left(3k - 8\sqrt{k}\right)x - 2k\sqrt{k} + 4k - 4$ の実数解であり

$16\sqrt{k}\,x = -4k\sqrt{k}$ から $\sqrt{k} \fallingdotseq 0$ より $x = -\dfrac{1}{4}k \cdots ⑧$ となる。R の $y$ 座標は R は $\ell_p$ 上の点から

$$y = \left(3k + 8\sqrt{k}\right)\left(-\frac{1}{4}k\right) + 2k\sqrt{k} + 4k - 4 = -\frac{3}{4}k^2 + 4k - 4 \cdots ⑨$$

⑧ から $k = -4x$ を ⑨ に代入して

$y = -\dfrac{3}{4}(-4x)^2 + 4(-4x) - 4$ 求める軌跡は

$\boldsymbol{y = -12x^2 - 16x - 4}$ ただし (1) から $\boldsymbol{x < -4,\ -4 < x < 0}$