漸化式と確率

1 整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を，さいころをくり返し投げることにより，以下のように定めていく。まず，$a_1 = 1$ とする。そして，正の整数 n に対し，a_{n+1} の値を，n 回目に出たさいころの目に応じて，次の規則で定める。

（規則）　n 回目に出た目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし，5, 6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする。

たとえば，さいころを 3 回投げ，その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると，$a_1 = 1$，$a_2 = -1$，$a_3 = -1$，$a_4 = 1$ となる。

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする。ただし，$p_1 = 1$ とし，さいころのどの目も，出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　$p_n \leqq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。ただし，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい。

〔筑波大学 2022〕

(1)　p_2 は 1 回目にさいころの目が $1, 2, 3, 4$ のいずれかが出る確率なので $\frac{4}{6} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

p_3 は $a_2 = 1$ のとき，さいころは 1, 2, 3, 4 の目が出る。または $a_2 = -1$ のとき，5, 6 の目が出る確率の和なので

$$p_3 = p_2 \times \frac{2}{3} + (1 - p_2) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

(2)　(1) と同様に考えて

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \quad \text{すなわち} \ \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}}$$

(3)　(2) の結果の両辺から $\frac{1}{2}$ を引き

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

これは数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ が，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であることを表す。

したがって $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ すなわち $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$p_n \leqq 0.5000005$ となるのは $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqq 0.5000005$ であり $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqq 0.0000005$ を解く。

辺々 2 倍し $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqq 0.000001 = 10^{-6}$ さらに両辺の逆数を考え $3^{n-1} \geqq 10^6 \cdots$① について

① の両辺の常用対数をとり

$$(n-1)\log_{10} 3 \geqq 6 \quad \text{から} \ n \geqq \frac{6}{\log_{10} 3} + 1$$

ここで $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ から $\frac{6}{0.48} < \frac{6}{\log_{10} 3} < \frac{6}{0.47}$ であり

$\frac{6}{0.48} = 12.5$，$\frac{6}{0.47} = 12.7\cdots$ より $12.7 < \frac{6}{0.47} < 12.8$ であり $13.5 < \frac{6}{\log_{10} 3} + 1 < 13.8$ となる。

したがって ① を満たす最小の整数 n は $\boldsymbol{n = 14}$ である。

〔別解〕常用対数を用いないで直接計算する方法

$3^6 = 729$，$3^{12} = \left(3^6\right)^2 = 729^2 = 531441 < 10^6$

そして $3^{13}=3^{12}\cdot3^{1}=1594323>10^{6}$ とすれば，① を満たす最小の $n-1$ は $n-1=13$ を得る。

※　上記の細かい計算を避けるならば $700<3^{6}=729<800$ 程度で評価しても
$490000<3^{12}<640000$，および $1470000<3^{13}<1920000$ から $3^{12}<10^{6}$，$3^{13}>10^{6}$ はわかる。

漸化式と確率

$\boxed{\textbf{2}}$ n を 2 以上の自然数とする。n 桁の自然数 a を

$$a = b_{n-1}\cdot 10^{n-1} + b_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \cdots + b_1\cdot 10 + b_0 \quad \text{と表す。}$$

ただし，$b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ は 0 から 9 までの整数で，b_{n-1} は 0 ではない。

このとき n 桁の自然数 a で，b_k $(0 \leqq k \leqq n-1)$ がいずれも 3 で割り切れないような a 全体の集合を U_n とする。集合 U_n の要素 a を選ぶとき，a が 3 で割り切れる確率を P_n，3 で割って 1 余る数である確率を Q_n，3 で割って 2 余る数である確率を R_n とする。

(1)　P_2 および P_3 を求めよ。

(2)　$Q_n = R_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　漸化式 $P_{n+1} = Q_n$ および $Q_{n+1} = \dfrac{1}{2}(P_n + Q_n)$ が成り立つことを示せ。

(4)　P_n および Q_n をそれぞれ n の式で表せ。　〔徳島大 2022〕

(1)　格位の数字として $A = \{1, 4, 7\}$，$B = \{2, 5, 8\}$ とする。

P_2 については A から 1 つ，B から 1 つ選んで並べたものなので

$$P_2 = {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

P_3 については 3 桁すべて A または B のときに限るので

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2)　$P_1 = 0$，$Q_1 = \dfrac{1}{2}$，$R_1 = \dfrac{1}{2}$ である。

Q_{n+1} については P_n のとき，最高位に A から 1 つ選び並べる，または R_n のとき，最高位に B から 1 つ選び並べるときなので

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= P_n \times \frac{1}{2} + R_n \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(P_n + R_n) \ \cdots ① \\ &= \frac{1}{2}(1 - Q_n) \quad (\because\ P_n + Q_n + Rn = 1) \\ &= -\frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2} \quad \text{さらに} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\left(Q_n - \frac{1}{3}\right) \quad \text{とできる} \end{aligned}$$

数列 $\left\{Q_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $Q_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列となることを示すので

$$Q_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{から}\ Q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ②$$

R_{n+1} については P_n のとき，最高位に B から 1 つ選び並べる，または Q_n のとき，最高位に A から

1 つ選び並べるときなので

$$R_{n+1} = P_n \times \frac{1}{2} + Q_n \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(1 - R_n)$$
$$= -\frac{1}{2}R_n + \frac{1}{2}$$ 同様にして

$$R_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ③$$

②，③ から $Q_n = R_n$ が成り立つ。

(3) P_{n+1} については Q_n のとき，最高位に B から 1 つ選び並べる，または R_n のとき，最高位に A から 1 つ選び並べるときなので

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}R_n$$
$$= \frac{1}{2}(Q_n + R_n) \cdots ④$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2Q_n \quad (\because (2))$$
$$= Q_n$$ を得る。

また，① に (2) の結果を用いることで $Q_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + Q_n)$ を得る。

(4) ② から，改めて $\boldsymbol{Q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(3) より $n \geqq 2$ のとき

$$P_n = Q_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $P_1 = 0$ を満たす。したがって $\boldsymbol{P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

※ P_n については ④ から $P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n) = -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}$，または $P_n = 1 - (Q_n + R_n)$ から求めてよい。