$\boxed{\textbf{1}}$ r を 0 でない実数とする。数列 $\{a_n\}$ が以下をみたしている。

$$\begin{cases} a_1 = r \\ a_n = n-1+r+\dfrac{1}{r}\left(a_{n-1}-n+2\right), \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を r の式で表せ。

(2) a_n を n，r の式で表せ。

(3) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。

(1) 与えられた漸化式に

$n=2$ を代入し

◀ 漸化式に従い，正確に計算する。
(規則性を見つけるよう心がける)

$$\begin{aligned} a_2 &= 2-1+r+\frac{1}{r}\left(a_1-2+2\right) \\ &= \boldsymbol{r+2} \quad (\because\ a_1=r) \end{aligned}$$

$n=3$ を代入し

$$\begin{aligned} a_3 &= 3-1+r+\frac{1}{r}\left(a_2-3+2\right) \\ &= 2+r+\frac{1}{r}(r+1) \\ &= \boldsymbol{r+\frac{1}{r}+3} \end{aligned}$$

$n=4$ を代入し

$$\begin{aligned} a_4 &= 4-1+r+\frac{1}{r}\left(a_3-4+2\right) \\ &= 3+r+\frac{1}{r}\left(r+\frac{1}{r}+1\right) \\ &= \boldsymbol{r+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+4} \end{aligned}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，改めて与えられた漸化式を

◀ 階差型の漸化式を作成する。

$$a_n = n-1+r+\frac{1}{r}\left(a_{n-1}-n+2\right) \ \cdots ① \quad とし$$

① の n を $n+1$ にかえ

$$a_{n+1} = (n+1)-1+r+\frac{1}{r}\left(a_n-(n+1)+2\right) \ \cdots ②$$

② − ① から

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{r}\left(a_n-a_{n-1}\right)+1-\frac{1}{r} \cdots ⊛$$

- **$r=1$ のとき** ⊛ は

◀ $c_{n+1}=pc_n+q$ の漸化式は
(通常 p は与えられているので気にとめることもないが)
p が 1 である場合と，そうでない場合の場合分けが必要

$$a_{n+1}-a_n = a_n-a_{n-1}$$

となり，これは数列 $\{a_n\}$ が初項 $a_1=r=1$，公差 $a_2-a_1=2$ の等差数列であることを表す。したがって

$$a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = \boldsymbol{2n-1}$$

- **$r \neq 1$ のとき** ⊛ の両辺から 1 を引いて

$$a_{n+1} - a_n - 1 = \frac{1}{r}(a_n - a_{n-1} - 1)$$

となり，これは数列 $\{a_{n+1} - a_n - 1\}$ が初項 $a_2 - a_1 - 1 = 1$，公比 $\frac{1}{r}$ の等比数列であることを表す。したがって

$$a_{n+1} - a_n - 1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= r + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}\right) \\ &= r + (n-1) + \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{r}} \quad \cdots ③ \\ &= n + r - 1 + \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-2}(r-1)} \end{aligned}$$

これは $a_1 = r$ を満たす。

したがって $\boldsymbol{a_n = n + r - 1 + \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-2}(r-1)}}$

(3) $r = \frac{1}{2}$ のとき ③ から

◀ $\sum$ 計算をしやすいように変形しておく

$$a_n = n - \frac{1}{2} + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^{n-1} + n - \frac{3}{2} \quad \text{とでき}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{3}{2}n \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 + \frac{1}{2}n(n-2)} \end{aligned}$$

2 正の実数 a，b に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{3}-a\,(a+1)\,x \\ g(x)=\dfrac{x^2}{2}+b \end{cases}$$

とする。xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点は，異なる 2 点のみである。これらの共有点の x 座標を p，q $(p<q)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) p と q をそれぞれ a の式で表せ。

(3) t が $p\leqq x\leqq q$ の範囲を動くとき，$|\,f(t)-g(t)\,|$ の最大値を a の式で表せ。

(1) x の 3 次方程式 $f(x)=g(x)\cdots$① すなわち

$$\frac{x^3}{3}-a\,(a+1)\,x=\frac{x^2}{2}+b$$

が異なる実数解をちょうど 2 個もつ a，b の関係を求める。

① を $f(x)-g(x)=0$ とし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とする。

$h(x)=0$ が，異なる実数解をちょうど 2 個もつのは 3 次関数 $h(x)$ の極値がちょうど 0 となるときである。

$h(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-a\,(a+1)\,x-b$ について

$$h'(x)=x^2-x-a\,(a+1)=(x+a)(x-(a+1))$$ となり

$a>0$ のとき $-a\neq a+1$ から $h(x)$ は極値をもつ。

◀ 3 次関数が極値をもつ条件を確認

このとき $-a<a+1$ から極大値は $h(-a)$，極小値は $h(a+1)$ となり

$$h(-a)=\frac{-a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2\,(a+1)-b$$
$$=\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2-b$$

$$h(a+1)=\frac{a^3+3a^2+3a+1}{3}-\frac{a^2+2a+1}{2}-a\,(a^2+2a+1)-b$$
$$=-\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2-a-\frac{1}{6}-b$$

求める条件は $h(-a)=0$

◀ 3 次方程式が異なる実数解をちょうど 2 個もつ条件

$$b=\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2$$

これは任意の $a\,(>0)$ について $b>0$ が成り立つ。

または $h(a+1)=0$

$$b=-\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2-a-\frac{1}{6}$$

これは任意の $a\,(>0)$ について $b>0$ が成り立たない。

したがって $\boldsymbol{b = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2}$

以下 $h(x) = f(x) - g(x)$ とする。

(2)　(1) から（極小値）$= 0$ となることはないので
$h(x) = h(-a)$ を解く。

◀ $a > 0$, $b > 0$ という条件で場合分けをしなくてすんでいる。（出題者に感謝）

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - a(a+1)x - b = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - b$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - a(a+1)x - \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$2x^3 - 3x^2 - 6a(a+1)x - 4a^3 - 3a^2 = 0$$

$$(x+a)^2(2x - (4a+3)) = 0$$

$$x = -a \text{（重解）},\ \frac{4a+3}{2}$$

$$\boldsymbol{(p,\, q) = \left(-a,\, \frac{4a+3}{2}\right)}$$

(3)　$p \leqq x \leqq q \cdots ②$ においての $|f(x) - g(x)|$ の最大値を M とする。$M = |h(x)|$ である。
$p = -a$ のとき ② では $h(x) \leqq 0$ から
$M =$（② での $h(x)$ の最小値）となる。

x	p	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$	q
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↘	極小	↗	0

◀ $h(a+1) < 0$ なので $|h(a+1)| = -h(a+1)$

$$\begin{aligned} M &= -h(a+1) \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{6} + b \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 + a + \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

3 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える。点P，Q，Rは，それぞれ辺OA，OB，BCを以下のように内分する。

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=s:(1-s),\quad \mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:(1-t),\quad \mathrm{BR}:\mathrm{RC}=u:(1-u)$$

さらに，点O，△ABCの重心G，△PQRの重心Hの3点は同一直線上にある。

次の問いに答えよ。

(1) s，u を t の式で表せ。また s のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|^2$，内積 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t の式で表せ。

(3) △PQRの面積 S を t の式で表せ。また，S が最小となる t の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots$③

さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots④$$

◀ 重心の位置ベクトルは，3つの頂点の位置ベクトルの相加平均

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}(t+1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots⑤$$

3点O，G，Hが同一直線上にあるとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となる実数 k が存在する。すなわち

◀ 3点が同一直線上にある条件

$$\frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}(t+1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad \text{となり}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立から

$$\begin{cases}\frac{1}{3}s=\frac{1}{3}k\cdots⑥\\ \frac{1}{3}(t+1-u)=\frac{1}{3}k\cdots⑦\\ \frac{1}{3}u=\frac{1}{3}k\cdots⑧\end{cases}$$

⑥，⑧から $s=u=k$

⑧から $t+1=k+u=2k$ とでき $k=\dfrac{t+1}{2}$

したがって $\boldsymbol{s=\dfrac{t+1}{2}}$，$\boldsymbol{u=\dfrac{t+1}{2}}$

また，$0<t<1$ から $1<t+1<2$ の辺々2で割り

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}<s<1}$$

(2) $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}$　を用いて

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB} = \frac{t+1}{2}\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB}$ から

$$\begin{aligned} 4\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 &= (t+1)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - 2(t+1)\cdot 2t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 4t^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \\ &= (t+1)^2 - 2(t+1)t + 4t^2 \\ &= 3t^2 + 1 \end{aligned}$$

◀ 分数計算しない工夫

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(3t^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} \\ &= \left(1 - \frac{t+1}{2}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{t+1}{2}\overrightarrow{OC} - t\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1-3t}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{t+1}{2}\overrightarrow{OC} \text{ から} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\left|\overrightarrow{QR}\right|^2 &= (1-3t)^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + 2(1-3t)(t+1)\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + (t+1)^2\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 \\ &= (1-3t)^2 + (1-3t)(t+1) + (t+1)^2 \\ &= 7t^2 - 6t + 3 \end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(7t^2-6t+3)}$$

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= \left((t+1)\overrightarrow{OA} - 2t\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left((1-3t)\overrightarrow{OB} + (t+1)\overrightarrow{OC}\right) \\ &= (t+1)(1-3t)\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + (t+1)^2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &\quad - 2t(1-3t)\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2t(t+1)\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}(t+1)(1-3t) + \frac{1}{2}(t+1)^2 - 2t(1-3t) - t(t+1) \\ &= 4t^2 - 3t + 1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(4t^2-3t+1)}$$

◀ ベクトルで頻出の面積公式

(3) $$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2\left|\overrightarrow{QR}\right|^2 - \left(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{(3t^2+1)(7t^2-6t+3) - (4t^2-3t+1)^2} \end{aligned}$$

$\sqrt{\quad}$ 内の 4 次式を $f(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(t) &= 21t^4 - 18t^3 + 9t^2 + 7t^2 - 6t + 3 \\ &\qquad - (16t^4 + 9t^2 + 1 - 24t^3 - 6t + 8t^2) \\ &= 5t^4 + 6t^3 - t^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 20t^3 + 18t^2 - 2t \\ &= 2t(10t^2 + 9t - 1) \\ &= 2t(t+1)(10t-1) \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ の範囲で増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{10}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

S は $f(t)$ が最小となるとき最小値をとるので，求める t の値は

$\boldsymbol{t = \frac{1}{10}}$