1 座標平面上の原点を O とし，2 点 A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，B$\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる。ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

(1)
$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

◀ 加法(減法)定理の基本形

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{12}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

◀ $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ を加法定理に用いて計算してもよい。
今回用いたのは
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$,
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{12}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{POA} + \triangle\mathrm{POB}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}(2\sin\theta + 3\cos\theta)}\end{aligned}$$

(3) (2) から

$S = \frac{\sqrt{13}}{8}\sin(\theta + \alpha)$ とできる。

ただし α は $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ となる角。

α を鋭角に制限すると $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$ であり，

$\tan\dfrac{\pi}{4} < \tan\alpha < \tan\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$ $\cdots$①

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{5\pi}{12}$ のとき，

$\theta+\alpha$ の最小値を θ_1，最大値を θ_2 とすると

$\theta_1 = \alpha + \dfrac{\pi}{12}$，$\theta_2 = \alpha + \dfrac{5\pi}{12}$ であり

$\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{5\pi}{12}$ $\cdots$②，$\dfrac{2\pi}{3} < \theta_2 < \dfrac{3\pi}{4}$ $\cdots$③

$\theta_1 < \dfrac{\pi}{2} < \theta_2$，　$\sin\theta_1 > \sin\theta_2$（$\because$ ②，③）

$\theta_1 \leqq \theta+\alpha \leqq \theta_2$ において

$\sin(\theta+\alpha)$ の最大値は $1\ \left(\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$，

最小値は $\sin\theta_2\ \left(\theta = \dfrac{5\pi}{12}\right)$

ここで

$$\begin{aligned}\sin\theta_2 &= \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{12}\right)\\ &= \sin\alpha\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\alpha\sin\frac{5\pi}{12}\\ &= \frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4\sqrt{13}}\end{aligned}$$

S について

最大値　$\dfrac{\sqrt{13}}{8}$　**（θ は $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ を満たす鋭角）**

最小値　$\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{32}$　$\left(\theta = \dfrac{5}{12}\pi\right)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

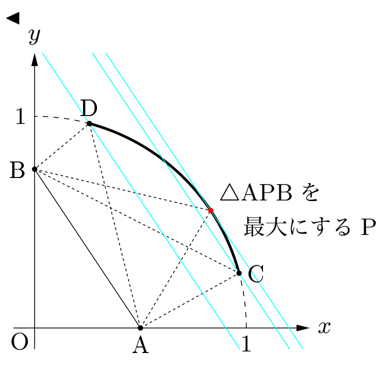
〔別解〕(3)

単位円周上に 2 点 C $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}, \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$，D $\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}, \sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ をとる。点 P は弧 CD 上を動くものとする。

$S = \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{PAB}$ であり，S の最大，最小については $\triangle\mathrm{PAB}$ の最大，最小を考えればよい。

直線 AB の傾きが $-\dfrac{3}{2}$ であるから $\triangle\mathrm{PAB}$ が最大となるのは弧 CD について，P における接線の傾きが $-\dfrac{3}{2}$ となるときである。（このとき $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$）

また直線 CD の傾きが -1 であることから D の方が C より直線 AB に近いことがわかる。



2 座標空間の原点を O とし，3 点 A$(2,\ 2,\ -2)$，B$(2,\ -2,\ 2)$，C$(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D，E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。

(1) 分点の公式を用いて

◀ ベクトルの分点の公式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}\\ &= \frac{(2,\ 2,\ -2) + 3\,(2,\ -2,\ 2)}{4}\\ &= (2,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+(-1)}\\ &= \frac{-(2,\ 2,\ -2) + 3\,(-2,\ 2,\ 2)}{2}\\ &= (-4,\ 2,\ 4)\end{aligned}$$

したがって **D$(2,\ -1,\ 1)$，E$(-4,\ 2,\ 4)$**

(2) 点 F が直線 DE 上にあるとき，実数 t を用いて

◀ 直線上の点であることの表現

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\ &= (1-t)\,(2,\ -1,\ 1) + t\,(-4,\ 2,\ 4)\\ &= (-6t+2,\ 3t-1,\ 3t+1)\ \cdots ①\end{aligned}$$

とできる。

このとき

◀ 成分によるベクトルの大きさの表現

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right| &= \sqrt{(-6t+2)^2 + (3t-1)^2 + (3t+1)^2}\\ &= \sqrt{54t^2 - 24t + 6}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= (-2,\ 2,\ 2) - (2,\ -2,\ 2)\\ &= (-4,\ 4,\ 0)\ \cdots ②\end{aligned}$$

同様に

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 4\sqrt{2}$$

ここで ①，② から

◀ 内積の定義

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -4\,(-6t+2) + 4\,(3t-1) + 0 = 36t - 12$$

そして $\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\theta$ より

$$36t - 12 = \sqrt{54t^2 - 24t + 6}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

を解く。

◀ 成分による内積計算

辺々 12 で割り

$$3t-1=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\quad\cdots③$$

$$2\sqrt{7}\,(3t-1)=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}$$

◀ 次に平方したとき，大きな数にならないよう，工夫して分母の有理化を施してある。(どうしてもしなければならないわけではない)

辺々平方し

$$28(3t-1)^2=(54t^2-24t+6)\cdot 2$$

$$7\,(9t^2-6t+1)=27t^2-12t+3$$

$$36t^2-30t+4=0$$

$$18t^2-15t+2=0$$

$$(3t-2)(6t-1)=0$$

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}$$

このうち ③ の解は $t=\dfrac{2}{3}$ のみなので ① から **F (−2, 1, 3)**

◀ 途中両辺を平方するところで，同値関係が崩れているので，ここでの解(必要条件)を ③ に戻して確認する。
実際は ③ の（右辺）>0 なので（左辺）>0 であれば，平方した方程式も同値

3 式 A，B，C を次のように定める。

$$A=y^2-3x^2+11x+4y-3x^3+13x^2-5x-5$$

$$B=y^2+x^2y-5xy+4y+x^3-7x^2+11x-5$$

$$C=y+x-1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A，B，C を y の整式とみて，A，B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A>\log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(1) 組立除法を用いて実際割り算する。

$$\begin{array}{c|ccc}
1-x & 1 & -3x^2+11x+4 & -3x^3+13x^2-5x-5 \\
 & & 1-x & (1-x)(-3x^2+10x+5) \\ \hline
 & 1 & -3x^2+10x+5 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
1-x & 1 & x^2-5x+4 & x^3-7x^2+11x-5 \\
 & & 1-x & (1-x)(x^2-6x+5) \\ \hline
 & 1 & x^2-6x+5 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

したがって

A を C で割ったときの商は $y-3x^2+10x+5$

B を C で割ったときの商は $y+x^2-6x+5$

(2) 両辺の対数の底が 1 より大きいので，与えられた不等式は

$$\begin{cases} A>0 & \cdots ① \\ -B>0 & \cdots ② \\ A>-B & \cdots ③ \end{cases}$$ と同値となる。

さらに 「② かつ ③」が成り立てば，① も成り立つので

◀ なるべく重複するような条件を除く工夫

(1) の結果を用いて

② は $B<0$ で $(y+x-1)(y+x^2-6x+5)<0$

境界線は $y+x-1=0\cdots④$ と $y+x^2-6x+5=0\cdots⑤$

③ は $A+B>0$ とし

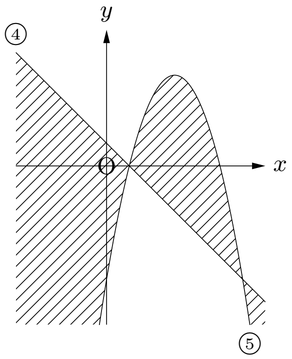
$$(y+x-1)\{(y-3x^2+10x+5)+(y+x^2-6x+5)\}>0$$

$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5)>0$$

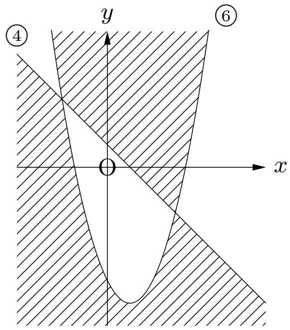
境界線は $y+x-1=0$ と $y-x^2+2x+5=0\cdots⑥$

それぞれの範囲を図示すると

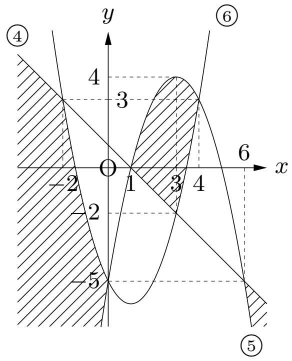
- ② が表す領域



- ③ が表す領域



求める領域は ②, ③ の共通範囲の下図で境界はすべて含まない。



4 曲線 C を $y=x^2e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\displaystyle\int xe^x\,dx$，$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t\,,\,0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3) で求めた t のうち $-1<t<0$ を満たすものを T とする。点 $(T\,,\,0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=(x^2+2x)\,e^x=x\,(x+2)\,e^x$

$y''=(x^2+2x)'e^x+(x^2+2x)\,(e^x)'=(x^2+4x+2)\,e^x$

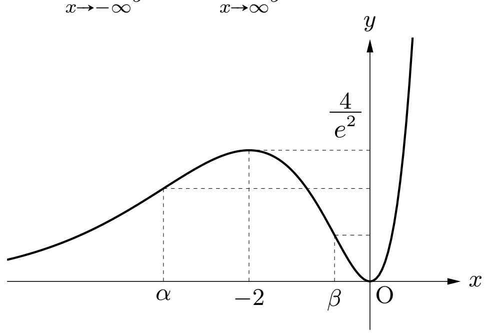
$x^2+4x+2=0$ の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$\alpha=-2-\sqrt{2}$，　$\beta=-2+\sqrt{2}$ 　であり

増減および凹凸の様子は次の通り

x	$\cdots$	α	$\cdots$	-2	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗		↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘		↘	0	↗

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$ から C の概形は下の図になる。



(2) 部分積分法を用いて

◀ 部分積分法の典型問題

$$\int xe^x\,dx=\int x(e^x)'\,dx$$
$$=xe^x-\int(x)'e^x\,dx$$
$$=\boldsymbol{(x-1)\,e^x+C_1}\quad\textbf{(}\boldsymbol{C_1}\ \textbf{は積分定数)}$$

$$\int x^2e^x\,dx=\int x^2(e^x)'\,dx$$
$$=x^2e^x-\int(x^2)'e^x\,dx$$
$$=x^2e^x-2\int xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\left((x-1)\,e^x + C_1\right)$$
$$= \boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)\,e^x + C_2} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_2}\textbf{ は積分定数)}$$

(3) C 上の点 $(a\,,\,a^2e^a)$ における接線の方程式は

$$y = (a^2 + 2a)\,e^a\,(x-a) + a^2e^a$$
$$= (a^2 + 2a)\,e^a\,x - (a^3 + a^2)\,e^a \ \cdots ①$$

① が点 $(t\,,\,0)$ を通るとき

$$0 = (a^2 + 2a)\,e^a\,t - (a^3 + a^2)\,e^a \ \cdots ②$$

C の形状から，C の接線は異なる接点においては，同一の接線をもつことはないので，a の方程式 ② が異なる実数解をちょうど 2 個もつ t の値を求める。

② の両辺を $e^a \fallingdotseq 0$ で割り

$$(a^2 + 2a)\,t - (a^3 + a^2) = 0$$
$$a\,\{(a+2)\,t - (a^2 + a)\} = 0$$
$$a\,(a^2 + (1-t)\,a - 2t) = 0$$

題意を満たすものは a の 2 次方程式 $a^2 + (1-t)\,a - 2t = 0 \cdots ③$ について

(i) ③ が $a = 0$ と $a \fallingdotseq 0$ となる解を 1 つずつもつ

(ii) ③ が $a \fallingdotseq 0$ である重解をもつ

のいずれかの場合である。

(i) ③ が $a = 0$ を解にもつのは ③ に $a = 0$ を代入し $-2t = 0$ から $t = 0$ となる。このとき ③ は

$$a^2 + a = 0 \quad \text{となり}\ a = 0,\ -1 \ \text{から適する。}$$

(ii) ③ が重解をもつのは (判別式) $= 0$ から

$$(1-t)^2 + 8t = 0 \quad \text{を解く}$$
$$t^2 + 6t + 1 = 0$$
$$t = -3 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{であり}$$

このときの重解は $a = \dfrac{t-1}{2} = -2 \pm \sqrt{2} \fallingdotseq 0$ で適する。

以上から求める t の値は $\boldsymbol{t = 0,\ -3 \pm 2\sqrt{2}}$

(4) (3) より $T = -3 + 2\sqrt{2}$ であり，$(T\,,\,0)$ を通る 2 本の接線は $\beta = -2 + \sqrt{2}$ とすると $(0\,,\,0)$，$\left(\beta\,,\,\beta^2e^\beta\right)$ における接線である。

求める面積を S とすると

$$S = \int_\beta^0 x^2e^2\,dx - \frac{1}{2}\,(T - \beta)\cdot\beta^2e^\beta$$

$$= \left[\,(x^2-2x+2)\,e^x\right]_\beta^0 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 e^\beta$$

ここで

$$\begin{aligned}\beta^2-2\beta+2 &= \left(-2+\sqrt{2}\right)^2-2\left(-2+\sqrt{2}\right)+2\\ &= 6-4\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}+2\\ &= 12-6\sqrt{2}\end{aligned}$$

◀ $\beta^2+4\beta+1=0$ を用いることもできる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(6-4\sqrt{2}\right)\\ &= \left(\sqrt{2}-1\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\\ &= -7+5\sqrt{2}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}S &= 2-\left(12-6\sqrt{2}\right)e^\beta-\left(-7+5\sqrt{2}\right)e^\beta\\ &= \mathbf{2-\left(5-\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

5 複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z}+\left(1-i+\overline{\beta}\right)z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(3) $|\beta|\leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|z|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β，z を求めよ。

$$z\overline{z}+\left(1-i+\overline{\beta}\right)z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(1) $(\text{与式})=z\left(\overline{z}+\overline{\alpha}\right)+\alpha\left(\overline{z}+\overline{\alpha}\right)$

$$=\boldsymbol{(z+\alpha)\left(\overline{z}+\overline{\alpha}\right)}$$

(2) $1+i+\beta=\alpha$ とし，与えられた等式の両辺に $\alpha\overline{\alpha}$ を加えると

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=\beta+\alpha\overline{\alpha}\cdots①$$ とできる。

① はさらに

$$|z+\alpha|^2=|\alpha|^2+\beta\cdots②$$ となり

(② の左辺) $\geqq 0$ から (② の右辺) $\geqq 0$ となることが必要条件となる。したがって β は実数でなければならない。

◀ 必要条件の第一段階

このとき $\alpha=(1+\beta)+i$ (複素数 α の実部が $1+\beta$) から

$|\alpha|^2+\beta\geqq 0$ は

$$(1+\beta)^2+1^2+\beta\geqq 0$$

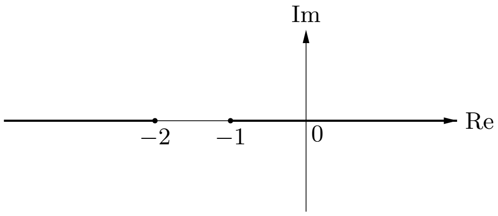
$$(\beta+1)(\beta+2)\geqq 0$$ すなわち $\beta\leqq -2,\ -1\leqq\beta$

◀ 必要条件の第二段階

逆に，この条件で β を定めると ② において，右辺は非負の定数となるので，複素数 z が存在することがわかる。

◀ 十分条件

したがって $\beta\leqq -2,\ -1\leqq\beta$



(3) (2) の結果から $|\beta|\leqq 2$ のとき

$$\beta=-2,\ -1\leqq\beta\leqq 2\cdots③$$

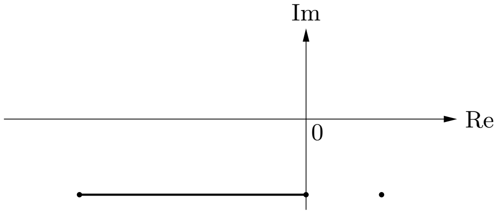
引き続き α を用いると ② は($|\alpha|^2+\beta=0$ のときは拡張して)

z は中心 $-\alpha$，半径 $\sqrt{|\alpha|^2+\beta}$ の円周上の点となる。

③ の範囲で，② の中心 $-\alpha$ の存在範囲は

$\mathrm{Im}\,(-\alpha)=-1$ かつ $(-3 \leqq \mathrm{Re}\,(-\alpha) \leqq 0$ または $\mathrm{Re}\,(-\alpha)=1)$

図示は



$\beta=-2$ のとき，$z=-\alpha=1-i$ であり $|z|=\sqrt{2}$

$\beta=-1$ のとき $z=\alpha=-i$ であり $|z|=1$

$-1<\beta \leqq 2$ では β は増加，

図から $|-\alpha|^2=|\alpha|^2$ も単調増加から ② の半径も単調増加となる。

各 $-\alpha$ が与えられたとき，$|z|$ を最大とする z は，3 点 0，$-\alpha$，z がこの順で一直線上に並ぶときである。

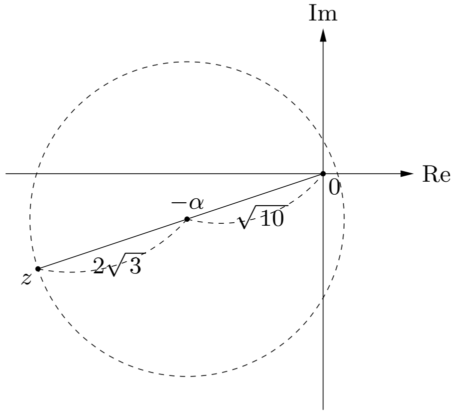
以上から $|z|$ を最大にするのは $\boldsymbol{\beta=2}$ のときで，このとき $-\alpha=-3-i$ となり，② の半径を r とすると $r=\sqrt{10+2}=2\sqrt{3}$

◀ 距離の最大を与える点の位置

$|z|$ の最大値は $|-\alpha|+r=\boldsymbol{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}$

そして

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}(-\alpha) \\ &= \frac{5+\sqrt{30}}{5}(-3-i) \\ &= \boldsymbol{-\frac{15+3\sqrt{30}}{5}-\frac{5+\sqrt{30}}{5}\,i} \end{aligned}$$



6 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x)=x^2$ とし，$a_1=10$ とする。曲線 $y=f(x)$ の点 $(a_n, f(a_n))$ における法線と曲線 $y=f(x)$ との 2 つの交点を $(a_n, f(a_n))$, $(-a_{n+1}, f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) すべての $n \geqq 1$ に対して

$$\left|a_n-\sqrt{n+99}\right| \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

(1) $f'(x)=2x$ であり，$x=a_n$ における $y=f(x)$ の法線の方程式は $a_n \fallingdotseq 0$ とき

◀ 法線の方程式

$$y=-\frac{1}{2a_n}(x-a_n)+{a_n}^2=-\frac{1}{2a_n}x+\frac{1}{2}+{a_n}^2 \cdots ①$$

$y=f(x)$ と ① の共有点の x 座標は

$$x^2=-\frac{1}{2a_n}x+\frac{1}{2}+{a_n}^2 \quad \text{を解く}$$

$$x^2+\frac{1}{2a_n}x-\frac{1}{2}-{a_n}^2=0$$

$$(x-a_n)\left(x+\frac{1}{2a_n}+a_n\right)=0$$

$$x=a_n,\ -\frac{1}{2a_n}-a_n$$

$$-a_{n+1}=-\frac{1}{2a_n}-a_n$$

すなわち $\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2a_n}}$ $\cdots ②$

(2) $\left|a_n-\sqrt{n+99}\right| \leqq 1 \cdots ⊛$ とする。

数学的帰納法を用いて証明する。

◀ 以下の解答は試行錯誤の結果を清書したもので，最初からなかなかこのようには書けません。

- $n=1$ のとき

  ($⊛$ の左辺) $=\left|a_1-\sqrt{1+99}\right|=|10-10|=0$

  となり $⊛$ は成り立つ。

- $n=k$ のとき $⊛$ が成り立つと仮定する。すなわち

  $$\left|a_k-\sqrt{k+99}\right| \leqq 1 \quad \cdots ③$$

  左辺の分子を有理化し

  $$\left|\frac{{a_k}^2-(k+99)}{a_k+\sqrt{k+99}}\right| \leqq 1$$

両辺に $a_k+\sqrt{k+99}\ (>0)$ をかけて

$$a_k{}^2-(k+99) \leqq a_k+\sqrt{k+99} \cdots ④$$

が成り立つと仮定する。ここで ⊛ で $n=k+1$ とした左辺は

$$\left|a_{k+1}-\sqrt{k+1+99}\right|$$
$$=\left|\frac{a_{k+1}{}^2-(k+100)}{a_{k+1}+\sqrt{k+100}}\right|$$
$$=\frac{\left|\left(a_k+\dfrac{1}{2a_k}\right)^2-(k+100)\right|}{a_k+\dfrac{1}{2a_k}+\sqrt{k+100}} \cdots ⑤ \quad (\because ②)$$

◀ 漸化式を用いて番号を下げる

ここで

$$(⑤\text{ の分子}) = \left|a_k{}^2+1+\frac{1}{4a_k{}^2}-(k+100)\right|$$
$$=\left|a_k{}^2-(k+99)+\frac{1}{4a_k{}^2}\right|$$
$$\leqq \left|a_k{}^2-(k+99)\right|+\left|\frac{1}{4a_k{}^2}\right|$$
$$\leqq a_k+\sqrt{k+99}+\frac{1}{4a_k{}^2} \quad (\because ④)$$

◀ 絶対値を分割したときの大小
$|A+B| \leqq |A|+|B|$

そして，② から $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2a_n}>0$ となり $\{a_n\}$ は単調増加数列である。さらに $a_1=10$ より $a_n \geqq 10$ となり $\dfrac{1}{2a_k}>\dfrac{1}{4a_k{}^2}$ が成り立つ。

$\sqrt{k+99}<\sqrt{k+100}$ とあわせて ⑤ について

$0<(\text{分子})<(\text{分母})$ となるので $\dfrac{(\text{分子})}{(\text{分母})}<1$

すなわち $n=k+1$ のときにも ⊛ は成り立つ。

したがってすべての自然数 n について ⊛ が成り立つことが示された。

(3) ⊛ が成り立つので $-1 \leqq a_n-\sqrt{n+99} \leqq 1$

辺々 $\sqrt{n}\ (>0)$ で割り

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq \frac{a_n}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n+99}}{\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ であり，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n+99}}{\sqrt{n}}\right)=0 \quad \text{となり}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+99}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{99}{n}}=\mathbf{1}$$