1 座標平面上の原点を O とし，2 点 A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，B$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり，単位円周上に点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる。ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

(1)
$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

◀ 加法(減法)定理の基本形

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{12}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

◀ $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ を加法定理に用いて計算してもよい。
今回用いたのは
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$,
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{12}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{POA} + \triangle\mathrm{POB}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right)}\end{aligned}$$

(3) (2) から

$S = \frac{1}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ とでき

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\dfrac{5\pi}{12} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7\pi}{12}$ となり

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$$

ただし最小値をとるのは $\theta = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}$

最大値をとるのは $\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ から $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

したがって S について

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{6}\right)}$

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}\right)}$

2 座標空間の原点を O とし，3 点 A$(2,\ 2,\ -2)$，B$(2,\ -2,\ 2)$，C$(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D，線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D，E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。

(1) 分点の公式を用いて

◀ ベクトルの分点の公式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1} \\ &= \frac{(2,\ 2,\ -2) + 3(2,\ -2,\ 2)}{4} \\ &= (2,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+(-1)} \\ &= \frac{-(2,\ 2,\ -2) + 3(-2,\ 2,\ 2)}{2} \\ &= (-4,\ 2,\ 4)\end{aligned}$$

したがって **D$(2,\ -1,\ 1)$，E$(-4,\ 2,\ 4)$**

(2) 点 F が直線 DE 上にあるとき，実数 t を用いて

◀ 直線上の点であることの表現

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= (1-t)(2,\ -1,\ 1) + t(-4,\ 2,\ 4) \\ &= (-6t+2,\ 3t-1,\ 3t+1) \quad \cdots ①\end{aligned}$$ とできる。

このとき

◀ 成分によるベクトルの大きさの表現

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right| &= \sqrt{(-6t+2)^2 + (3t-1)^2 + (3t+1)^2} \\ &= \sqrt{54t^2 - 24t + 6}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (-2,\ 2,\ 2) - (2,\ -2,\ 2) \\ &= (-4,\ 4,\ 0) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

同様に

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 4\sqrt{2}$$

ここで ①，② から

◀ 内積の定義

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -4(-6t+2) + 4(3t-1) + 0 = 36t - 12$$

そして $\overrightarrow{\mathrm{OF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\theta$ より

$$36t - 12 = \sqrt{54t^2 - 24t + 6} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{14}$$ を解く。

◀ 成分による内積計算

辺々 12 で割り

$$3t-1=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\quad\cdots③$$

◀ 次に平方したとき，大きな数にならないよう，工夫して分母の有理化を施してある。(どうしてもしなければならないわけではない)

$$2\sqrt{7}\,(3t-1)=\sqrt{54t^2-24t+6}\cdot\sqrt{2}$$

辺々平方し

$$28(3t-1)^2=(54t^2-24t+6)\cdot 2$$

$$7\,(9t^2-6t+1)=27t^2-12t+3$$

$$36t^2-30t+4=0$$

$$18t^2-15t+2=0$$

$$(3t-2)(6t-1)=0$$

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}$$

このうち ③ の解は $t=\dfrac{2}{3}$ のみなので ① から **F (−2, 1, 3)**

◀ 途中両辺を平方するところで，同値関係が崩れているので，ここでの解(必要条件)を ③ に戻して確認する。
実際は ③ の（右辺）>0 なので（左辺）>0 であれば，平方した方程式も同値

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n = na_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(1) それぞれの漸化式 $(n \geqq 1)$

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \cdots ①$$

$$b_n = na_n \cdots ②$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \cdots ③$$ から

$$a_2 = \frac{3\cdot 1}{1+1}a_1 - 10 = \frac{3}{2}\cdot 3 - 10 = \boldsymbol{-\frac{11}{2}}$$

$$a_3 = \frac{3\cdot 2}{2+1}a_2 - 10 = 2\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) - 10 = \boldsymbol{-21}$$

$$b_1 = 1\cdot a_1 = \boldsymbol{3}$$

$$b_2 = 2a_2 = \boldsymbol{-11}$$

$$b_3 = 3a_3 = \boldsymbol{-63}$$

$$c_1 = b_2 - b_1 = -11 - 3 = \boldsymbol{-14}$$

$$c_2 = b_3 - b_2 = -63 - (-11) = \boldsymbol{-52}$$

◀ 漸化式から正確に計算する。

(2) ① の両辺の分母を払い

$$(n+1)a_{n+1} = 3na_n - 10(n+1)$$

② を用いて

$$\boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n - 10(n+1)} \cdots ④$$

◀ 分母を払うことに気づかなければ $a_n = \dfrac{b_n}{n}$，$a_{n+1} = \dfrac{b_{n+1}}{n+1}$ として ① に代入すると a_n，a_{n+1} が消去され(自然に) b_n，b_{n+1} の関係式が得られる。

(3) ④ の n を $n+1$ にかえて

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 10(n+2) \cdots ⑤$$

⑤ − ④ から

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 3(b_{n+1} - b_n) - 10$$

◀ ⑤ の定数部分の 1 次式を定数化する常套手段

③ を用いて

$$c_{n+1} = 3c_n - 10 \cdots ⑥$$

(4) ⑥ の両辺から 5 を引く

$$c_{n+1} - 5 = 3c_n - 10 - 5 = 3(c_n - 5) \quad から$$

数列 $\{c_n - 5\}$ は，
初項 $c_1 - 5 = -19$，公比 3 の等比数列となるので

$$c_n - 5 = -19 \cdot 3^{n-1} \quad すなわち$$

$$c_n = 5 - 19 \cdot 3^{n-1}$$

次に $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(5 - 19 \cdot 3^{k-1}\right) \\ &= 3 + 5(n-1) - 19 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \\ &= 5n - \frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2} \end{aligned}$$

これは $b_1 = 3$ を満たす。したがって

$$b_n = 5n - \frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2}$$

最後に ② から $a_n = \dfrac{b_n}{n}$ から

$$a_n = 5 - \frac{19}{2n} \cdot 3^{n-1} + \frac{15}{2n}$$

◀ ⑥ は頻出の隣接 2 項間漸化式

◀ 階差数列による一般項の定義

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2) (1) で図示した領域のうち $1 \leqq x \leqq 4$ を満たす部分の面積を求めよ。

(1) 与えられた不等式を連立不等式

$$\begin{cases} 0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) \ \cdots ① \\ -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) \\ \qquad < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5) \ \cdots ② \end{cases}$$

として考える。② はさらに

$$(y+x-1)\{(y-3x^2+10x+5)+(y+x^2-6x+5)\} > 0$$

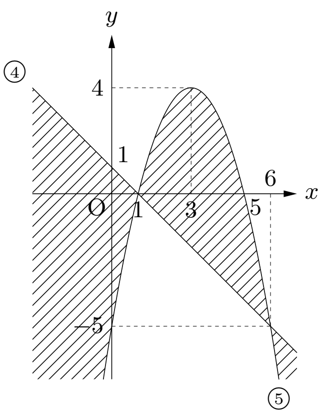
$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5) > 0 \cdots ③ \quad とできる$$

① を表す領域は $y+x-1=0 \cdots ④$，$y+x^2-6x+5=0 \cdots ⑤$ を境界線とし，

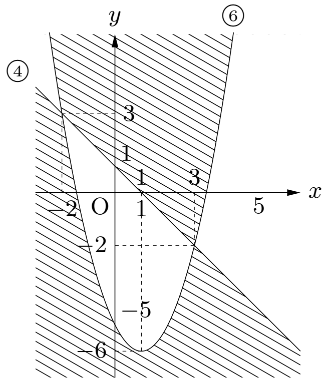
③ を表す領域は $y+x-1=0$，$y-x^2+2x+5=0 \cdots ⑥$ を境界線とする以下の領域になる。ただし境界線はすべて含まない。

◀ 2 つの積領域を表す連立不等式とする。(計算で展開するのは，正解にたどり着くには逆方向です)

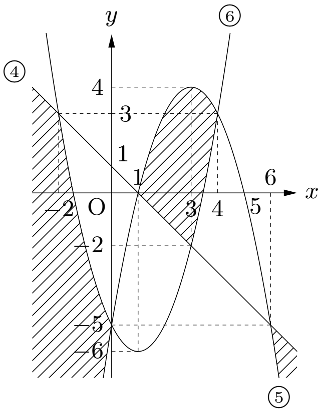
- ① が表す領域



- ③ が表す領域



したがって ① かつ ③ を満たす領域は次の斜線部で境界はすべて含まない。



(2)　$1 \leqq x \leqq 3$ では境界線が ④ と ⑤，$3 \leqq x \leqq 4$ では境界線が ⑤ と ⑥ であり，求める面積を S とすると

◀ 求めた領域の形から，積分区間と被積分関数を決定する。

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(-x^2+6x-5)-(-x+1)\}\,dx \\ &\qquad + \int_3^4 \{(-x^2+6x-5)-(x^2-2x-5)\}\,dx \\ &= \int_1^3 (-x^2+7x-6)\,dx + \int_3^4 (-2x^2+8x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x\right]_1^3 + \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_3^4 \\ &= \left(-9+\frac{63}{2}-18\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)+\left(-\frac{128}{3}+64\right)-(-18+36) \\ &= -9-18+6+64-18+\frac{63-7}{2}+\frac{1-128}{3} \\ &= \mathbf{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式を用いる方法で

- A$(1, 0)$，B$(3, -2)$，C$(4, 3)$ とし，
  直線 AC と ⑤ で囲まれる部分の面積，
  直線 BC と ⑥ で囲まれる部分の面積
- A$(1, 0)$，B$(3, -2)$，C$(4, 3)$，D$(3, 4)$ とし，
  直線 AD と ⑤ で囲まれる部分の面積，
  直線 DC と ⑤ で囲まれる部分の面積，
  直線 BC と ⑥ で囲まれる部分の面積

どちらも途中式を書きづらいのでマーク向け解答になりそう