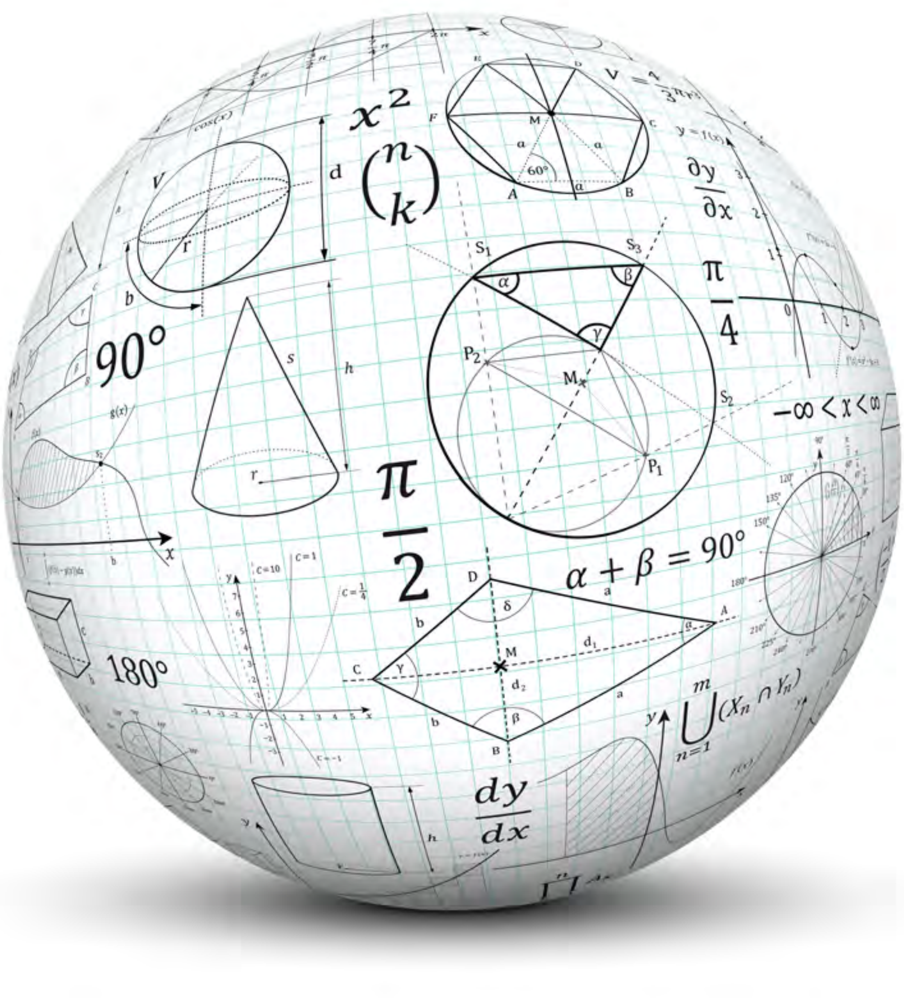
# 令和３年度
# 高校第３学年
# 二次・私大対策演習問題



# 2022 年度入試（数学 Ⅱ·B）記述対策

**1** $a=\cos\dfrac{\pi}{5}$，$b=\cos\dfrac{\pi}{7}$ とする。

(1) $\cos\dfrac{\pi}{10}$ を $a$ を用いた式で表せ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{14}$ を $b$ を用いた式で表せ。

(3) $\cos\dfrac{\pi}{35}$ を $a$ と $b$ を用いた式で表せ。

〔愛知教育〕

**2** 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-6x+7$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) $f(x)$ が $x=\alpha,\beta$（ただし $\alpha<\beta$）で極値をとるとき，$\alpha$ と $\beta$ を求めよ（極値を求める必要はない）。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸とで囲まれる領域のうち，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ をみたす部分の面積を求めよ。

〔琉球大〕

**3** $c$ を整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 55 と 72 は互いに素であることを示せ。

(2) 不定方程式 $55x+72y=1$ の整数解を 1 組求めよ。

(3) 不定方程式 $55x+72y=c$ の整数解をすべて求めよ。

(4) $c>3960$ のとき，不定方程式 $55x+72y=c$ の整数解で $x>0$ かつ $y>0$ をみたすものが存在することを示せ。

〔島根大〕

**4** $k,x,y,z$ を実数とする。$k$ が以下の (1)，(2)，(3) のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)\geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

(1) $k=2$

(2) $k=-1$

(3) $-1<k<2$

〔神戸大〕

**5** $xy$ 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0,\ C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0$$

が外接するとし，その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) $k$ の値を求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) 円 $C_1$ と円 $C_2$ の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

〔筑波大〕

**6** 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

〔北海道大〕

**7** $\triangle$OAB は OA $=$ OB $=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{3}{5}$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 線分 AB の長さを求めなさい。

(2) 直線 OA 上に点 O とは異なる点 C を，BC $=1$ を満たすようにとる。このとき，線分 OC の長さを求めなさい。

(3) $\triangle$OAB，$\triangle$OBC の内接円の半径をそれぞれ求めなさい。

〔山口大〕

$\boxed{\textbf{8}}$ 座標平面上の 2 点 A$(0, -1)$，B$(1, 2)$ を通る直線を $\ell$ とする。また，中心 $(3, -2)$，半径 3 の円を $C$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\ell$ の方程式を求めよ。

(2) $\ell$ と $C$ は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 $C$ 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を $T$ とする。$T$ はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 $T$ 上の点 $(x, y)$ に対して，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

〔新潟大〕

$\boxed{\textbf{9}}$ 3 個のさいころ A，B，C を同時に投げる。それぞれのさいころの出る目を $a$，$b$，$c$ で表す。このとき，次の問に答えよ。

(1) $ab = c$ となる確率を求めよ。

(2) $a$，$b$，$c$ のうち，少なくとも 1 つが偶数となる確率を求めよ。

(3) $a+b+c > 5$ となる確率を求めよ。

(4) $(a-b)(b-c)(c-a) < 0$ となる確率を求めよ。

(5) $ab-bc$ が負の奇数となる確率を求めよ。

(6) $ab-bc$ が正の偶数となる確率を求めよ。

〔山形大〕

$\boxed{\textbf{10}}$ 2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 多項式 $x^3+8$ を実数を係数とする 1 次式と 2 次式の積に因数分解しなさい。

(2) $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めなさい。

(3) $\alpha^3+\beta^3$ の値を求めなさい。

(4) $\alpha^{10}+\beta^{10}$ の値を求めなさい。

〔福島大〕

**11** 関数

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - 6 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{-x} + 2$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $2^x + 2^{-x} \geqq 2$ が成り立つことを示せ。また，等号が成立する $x$ の値を求めよ。

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ とする。$f(x)$ を $t$ を用いて表せ。

(3) 等式

$$s + \frac{1}{s} = 6$$

を満たすような正の実数 $s$ の値を求めよ。

(4) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。〔岐阜大〕

**12** $f(x) = 2x^2 + x + 1$ とおき，放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(1, 4)$ における接線を $\ell$ とする。点 P を通り，$\ell$ とのなす角が $45^\circ$ である直線で，傾きが正であるものを $m$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 直線 $\ell$ の方程式を求めよ。

(2) 直線 $m$ の方程式を求めよ。

(3) $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，直線 $m$，および $y$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。〔佐賀大〕

**13** $x$ の整式 $A$，$B$ を以下のように定める。

$$A = 3x^2 + 14x - 24,\ B = 2x + c$$

ただし $c$ は実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x$ についての方程式 $A = B$ が虚数解をもつときの $c$ の範囲を求めよ。

(2) $x$ の整式 $P(x) = 18x^4 + 168x^3 + 116x^2 - 1288x + 1050$ を $A$ を用いて表せ。

(3) (2) の $P(x)$ について，方程式 $P(x) = 0$ を解け。〔鳥取大〕

**14** 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 4$，公差 $d$ の等差数列であり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 2$，公比 $r$ の等比数列であるとする。数列 $\{c_n\}$ は $c_1 = 2$，$c_2 = 2$，$c_3 = -6$，$c_4 = -38$ という条件と $c_n = a_n - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件の両方によって与えられるとする。

(1) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めなさい。

(3) 数列 $\{d_n\}$ が $d_n = \dfrac{1}{2}(4n - c_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件によって与えられ，数列 $\{e_n\}$ が $e_n = \dfrac{1}{27}(2n^2 + 2n + 1 - S_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ という条件によって与えられるとする。自然数 $\ell$，$m$ についての連立方程式

$$\begin{cases} 3\log_3 d_\ell + 2\log_3 e_m = 5 \\ 2\log_3 d_\ell - \log_3 e_m = 8 \end{cases}$$

を満足する $\ell$，$m$ を求めなさい。 〔埼玉大〕

**15** $a$ を正の定数とする。放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a$ の両方に接する直線を $\ell$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $C_1$ と $C_2$ の共有点の $x$ 座標を $a$ を用いて表せ。

(2) $\ell$ の方程式を求めよ。

(3) $C_1$，$C_2$，および $\ell$ で囲まれた図形の面積を $a$ を用いて表せ。 〔滋賀大〕

**16** △ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a$，$b$，$c$ で表し，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ $A$，$B$，$C$ で表す。次の問いに答えなさい。

(1) $b = 7$，$c = 5$，$\cos A = \dfrac{1}{7}$ であるとき，△ABC の外接円の半径 $R$ を求めなさい。

(2) $b = 2c$，$\cos A = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin A : \sin B : \sin C$ を求めなさい。

(3) $b = 6$，$c = 2$ であり，$6\cos C - 2\cos B = a$ が成り立つとき，$B$ と $a$ の値をそれぞれ求めなさい。 〔秋田大〕

**17** $xy$ 平面上の $x$ 座標と $y$ 座標が共に正の整数である点 $(x, y)$ 全体の集合を $D$ とする。$D$ に属する点 $(x, y)$ に対して $x+y$ が小さいものから順に，また $x+y$ が等しい点の中では $x$ が小さい順に番号をつけ，$n$ 番目 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の点を $\mathrm{P}_n$ とする。例えば，$\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$ の座標は順に $(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 1)$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 座標が $(2, 4)$ である点は何番目か。また，$\mathrm{P}_{10}$ の座標を求めよ。

(2) 座標が $(n, n)$ である点の番号を $a_n$ とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

〔岡山大〕

**18** $xy$ 平面上の点 A，B，C の座標はそれぞれ $(1, 1)$，$(3, 1)$，$(2, 3)$ である。三角形 ABC の内部および境界で与えられる領域を $D$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 領域 $D$ を図示し，不等式を用いて表せ。

(2) 点 $(x, y)$ が領域 $D$ 内を動くとき，$4x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 点 $(x, y)$ が領域 $D$ 内を動くとき，$\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。 〔長崎大〕

**19** $f(x) = |x^3 - 3x|$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $x$ についての方程式 $f(x) = k$ が異なる実数解をちょうど 4 個もつような実数 $k$ の値を求めよ。

(2) $x$ についての方程式 $f(x) = ax$ が異なる実数解をちょうど 3 個もつような実数 $a$ の値の範囲を求めよ。

(3) 正の実数 $a$ は (2) の条件を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように，$a$ の値を定めよ。 〔和歌山大〕

**20** $p$，$q$ を実数とする。点 O を原点とする座標空間において，4 点

A $(1, 1, 0)$，B $(0, 2, 0)$，C $(0, 0, 6)$，D $(p, q, 1)$

をとる。3 点 A，B，C を含む平面を $\alpha$ とし，$\angle$AOD の大きさを $\theta$ とし，$\triangle$AOD の面積を $S$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\cos\theta$ を，$p$ と $q$ を用いて表せ。

(2) 面積 $S$ を，$p$ と $q$ を用いて表せ。

(3) 点 D が平面 $\alpha$ 上を動くとき，面積 $S$ の最小値を求めよ。 〔宮崎大〕

**21** 中の見えない 2 つの袋 A，B があり，どちらにも赤球 1 個と白球 1 個が入っている。この 2 つの袋から同時に 1 個ずつ球を取り出して他方の袋に入れるという試行を繰り返す。$n$ 回の試行の後に最初と同じになる確率を $a_n$，そうでない確率を $b_n$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) $a_1$，$a_2$，$a_3$ を求めよ。

(2) $a_{n+1}$ を $a_n$，$b_n$ を用いて表せ。

(3) $a_n$ を $n$ を用いて表せ。 〔香川大〕

**22** 正の実数 $x$，$y$ が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}\ \cdots\ (\ast)$$

を満たすとする。

(1) $y^2$ を $x$ を用いて表せ。

(2) 正の実数 $x$，$y$ が $(\ast)$ および $1-\frac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ。

〔北海道〕

**23** 平面上に半径がそれぞれ $a^2$，$b^2$，$c^2$ $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 $A$，$B$，$C$ および直線 $\ell$ がある。3 つの円はどれも直線 $\ell$ に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする。

(1) $c$ を $a$ と $b$ を用いて表せ。

(2) 数列 $a, b, c$ が等比数列となるとき，その公比を求めよ。 〔千葉大〕

**24** 空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。$s$，$t$ を $0<s<1$，$0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を 1 : 1 に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を 1 : 2 に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1) $t$ を $s$ を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=2$, $\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$, $\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$, $\angle\mathrm{COA}=60^\circ$, $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，$s$ の値を求めよ。 〔大阪大〕

**25** 関数 $f(x)$ は等式 $f(x) = 3x^2 + \int_0^2 xf(t)\,dt + \int_{-1}^1 f(t)\,dt$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x) = xf(x) + x$ の区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ における最大値と最小値を求めよ。

〔山梨大〕

**26** 実数 $x$ が，$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ および $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{4}{3}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\sin x + \cos x$ の値を求めよ。

(2) $\sin 2x + \cos 2x$ の値を求めよ。

(3) $\sin 3x + \cos 3x$ の値を求めよ。 〔公立はこだて未来〕

**27** 公平な大小各 1 枚の合計 2 枚のコインを投げることで，$xy$ 平面上の任意の点 $(x, y)$ においてある駒を動かす試行を行う。そのルールは，

- 大きなコインが表で小さなコインが表になったとき，駒を $(x, y)$ から $(x+1, y)$ に動かす。
- 大きなコインが表で小さなコインが裏になったとき，駒を $(x, y)$ から $(x, y+1)$ に動かす。
- 大きなコインが裏で小さなコインが裏になったとき，駒を $(x, y)$ から $(x-1, y)$ に動かす。
- 大きなコインが裏で小さなコインが表になったとき，駒を $(x, y)$ から $(x, y-1)$ に動かす。

いま，駒が原点 $(0, 0)$ においてあり，この試行を $n$ 回繰り返したときに，駒が原点に戻る確率を $P_n$ とし，$n$ 回繰り返したときに，駒が初めて原点に戻る確率を $Q_n$ とする。

(1) $Q_4$ を $P_2$ と $P_4$ を用いて表せ。

(2) $Q_6$ を $P_2$ と $P_4$ と $P_6$ を用いて表せ。

(3) $Q_6$ の値を求めよ。 〔奈良教育大〕

**28** $a$ を $a > 0$，$a \fallingdotseq 1$ を満たす定数とし，2 つの 2 次関数

$$f(x) = x^2 - x - a,\ g(x) = x^2 - ax - 1$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ は共に 2 つの異なる実数解を持つことを示せ。

(2) $g(x) = 0$ の 2 つの解のうち 1 つだけが $f(x) = 0$ の 2 つの解の間にあることを示せ。

(3) 放物線 $y = f(x)$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を $S(a)$，放物線 $y = g(x)$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。$S(a) = T(a)$ となるときの $a$ と $S(a)$ の値を求めよ。 〔静岡大〕

**29** $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10}48$ を求めよ。

(2) $10^{0.84}<7<10^{0.85}$ を示せ。 〔富山県立大〕

**30** 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=2,\ (n+1)\,a_{n+1}=(n+3)\,a_n+2\ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ とするとき，$b_{n+1}-b_n$ を $n$ を用いて表せ。

(2) 次の等式が $k$ についての恒等式となるように，定数 $p$ の値を定めよ。

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}=\frac{1}{p}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 〔鹿児島大〕

**31** $a$ を定数とし，曲線 $C\ :\ y=x(x-2)^2$ と直線 $\ell\ :\ y=ax$ を考える。$C$ と $\ell$ は異なる 3 点で交わり，交点の $x$ 座標はそれぞれ 0 以上とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $C$ と $\ell$ とで囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるように $a$ の値を定めよ。 〔滋賀大〕

**32** O，A，B は平面上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$ を満たすとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ を示せ。さらに △OAB の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=-1$ となるような平面上の点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値を求めよ。さらに，このときの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ で $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})\geqq -\dfrac{1}{2}$ を満たす点 Q の存在範囲はどのような図形になるか。また，その面積を求めよ。 〔三重大〕

**33** 以下の問いに答えよ。

(1) $k^2+2$ が素数となるような素数 $k$ をすべてみつけよ。また，それ以外にないことを示せ。

(2) 整数 $\ell$ が 5 で割りきれないとき，$\ell^4-1$ が 5 で割り切れることを示せ。

(3) $m^4+4$ が素数となるような素数 $m$ は存在しないことを示せ。 〔お茶の水大〕

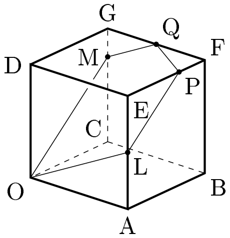
**34** $0 \leqq \alpha \leqq \theta \leqq \pi$ とし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$，$x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とする。

(1) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めなさい。

(2) $x$ のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) 関数 $y = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3$ の最小値を求めなさい。〔大分大〕

**35** 下図のように，1 辺の長さが 1 の立方体 DEFG-OABC がある。点 L は線分 AE を 1:1 に，点 M は線分 CG を 3:1 に内分する点である。また，3 点 O，L，M を通る平面 $T$ は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P，Q で交わる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，(1) については答のみでよい。




(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$，および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle\mathrm{LOM}$ の面積 $S_1$ を求めよ。

(3) $\mathrm{EP}:\mathrm{PF} = p:(1-p)$ $(0<p<1)$，$\mathrm{GQ}:\mathrm{QF} = q:(1-q)$ $(0<q<1)$ とする。このとき，$p$ と $q$ の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。また，五角形 OLPQM の面積 $S_2$ を求めよ。

〔長崎大〕

**36** 1, 2, $\cdots$, 15, 16 の数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。これら 16 枚のカードから 3 枚を同時に選ぶとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 枚のカードの数の積が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2) 3 枚のカードの数の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3) 3 枚のカードの数の積が 3 の倍数でなく，3 枚のカードの数の和も 3 の倍数でない確率を求めよ。

〔弘前大〕

**37**　$a$ を正の実数とする。放物線 $y=x^2$ を $C_1$，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を $C_2$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　点 $(t,t^2)$ における $C_1$ の接線の方程式を求めよ。

(2)　$C_1$，$C_2$ が異なる 2 つの共通接線 $\ell$，$\ell'$ を持つような $a$ の値の範囲を求めよ。ただし，$C_1$ と $C_2$ の共通接線とは，$C_1$ と $C_2$ の両方に接する直線のことである。

以下，$a$ は (2) で求めた範囲にあるとし，$\ell$，$\ell'$ を $C_1$ と $C_2$ の異なる 2 つの共通接線とする。

(3)　$\ell$，$\ell'$ の交点の座標を求めよ。

(4)　$C_1$ と $\ell$，$\ell'$ で囲まれた領域を $D_1$ とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を $D_2$ とする。$D_1$ と $D_2$ の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。　〔名古屋大〕

**38**　平面上に $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CA}=6$ となる $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。$\angle\mathrm{BAC}$ の 2 等分線と辺 BC の交点を P とする。$t$ を $0<t<1$ をみたす実数とし，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。線分 AP と線分 CQ の交点を R とする。以下の問いに答えなさい。

(1)　$\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めなさい。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めなさい。

(3)　$\triangle\mathrm{APC}$ の面積を求めなさい。

(4)　$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積と $\triangle\mathrm{RPC}$ の面積の比が $3:2$ となる $t$ の値を求めなさい。　〔東京都立大〕

**39**　$x_1$，$x_2$，$x_3$，$y_1$，$y_2$，$y_3$ はそれぞれ 1，2，4 のいずれかの値を取るとする。

(1)　等式

$$x_1\times x_2\times x_3=y_1\times y_2\times y_3$$

を満たすような $x_1$，$x_2$，$x_3$，$y_1$，$y_2$，$y_3$ の組は何通りあるか求めよ。

(2)　等式

$$x_1\times x_2\times x_3=4\times y_1\times y_2\times y_3$$

を満たすような $x_1$，$x_2$，$x_3$，$y_1$，$y_2$，$y_3$ の組は何通りあるか求めよ。　〔愛知教育大〕

**40** 3つの円 $C_1:(x-1)^2+(y-4)^2=27$, $C_2:(x-3)^2+(y-1)^2=10$, $C_3:(x-4)^2+y^2=10$ について，次の各問に答えよ。

(1) $C_1$ と $C_2$ の2つの交点を通る直線 $\ell$ の方程式と，$C_1$ と $C_3$ の2つの交点を通る直線 $m$ の方程式を求めよ。

(2) $x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点を格子点という。$\ell$ 上の格子点の座標と，$m$ 上の格子点の座標をすべて求めよ。

(3) $\ell$ と $m$ の交点の座標を $(a, b)$ とする。$\ell$ 上の格子点の $x$ 座標で $a$ 以上のものを小さい順に並べた数列を $\{a_n\}$ とし，$m$ 上の格子点の $y$ 座標で $b$ 以上のものを小さい順に並べた数列を $\{b_n\}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k b_k}$ を求めよ。

〔茨城大〕

**41** $a$ を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a$ の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1|+|x-2|\leqq 4$$

(3) $x$ が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を $a$ を用いて表せ。〔広島大〕

**42** 次の問いに答えなさい。

(1) 中心を O とする半径 1 の円に内接する正 24 角形の隣り合う 2 つの頂点を A，B とする。△OAB の面積を求めなさい。

(2) 不等式

$$\pi>3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

が成り立つことを証明しなさい。〔信州大〕

**43** △ABC の外心を O，垂心を H とするとき，下の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わり，その点を三角形の垂心という。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$ が成り立つような ∠A の大きさを求めよ。

〔東京学芸大〕

**44** 曲線 $C$ ： $y=x^3-2x^2+x$ 上に点 $\mathrm{P}_1\,(2,\,2)$ がある。自然数 $n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ に対して点 $\mathrm{P}_n$ から点 $\mathrm{P}_{n+1}$ を次のように定める。

点 $\mathrm{P}_n$ を接点とする $C$ の接線を $\ell_n$ とし，$C$ と $\ell_n$ の共有点のうち，$\mathrm{P}_n$ と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}$ とする。

点 $\mathrm{P}_n$ の $x$ 座標を $a_n$ とする。

(1) $\mathrm{P}_2$ の座標を求めよ。

(2) 接線 $\ell_n$ の傾きおよび $y$ 切片をそれぞれ $a_n$ を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。〔熊本大〕

**45** 次の問いに答えよ。

(1) すべての整数 $n$ に対し，$n^4$ を 5 で割ったときの余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^4+y^4+2=z^4$ を満たす整数 $x$，$y$，$z$ は存在しないことを示せ。〔岩手大〕

**46** 実数 $x$ に対して，

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

とおく。

(1) $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ $t$ の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq \pi$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。〔北海道〕

**47** 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA，OB，OC 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおく。ただし $0 < p < 1$，$0 < q < 1$，$0 < r < 1$ とする。

2 直線 PQ，AB は点 X で交わり，2 直線 QR，BC は点 Y で交わり，2 直線 RP，AC は点 Z で交わるとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とおいて，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と $p$，$q$，$r$ を用いて表せ。

(2) 3 点 X，Y，Z は同一直線上にあることを示し，2 つの線分 XY，YZ の長さの比を $p$，$q$，$r$ を用いて表せ。

(3) $p = \dfrac{1}{2}$，$q = \dfrac{3}{4}$ のとき，3 点 X，Y，Z を通る直線と直線 PX が直交するように定数 $r$ の値を定めよ。

〔宮城教育大〕

**48** 下の表のように，正の偶数を並べ，上から $m$ 行目，左から $n$ 列目の数を $a(m, n)$ と表すことにする。例えば，$a(3, 2) = 16$ である。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | ⋯ |
| 4 | 10 | 18 | 28 | ⋯ | ⋯ |
| 8 | 16 | 26 | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| 14 | 24 | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| 22 | 34 | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| 32 | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ |
| ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ | ⋯ |

次の問に答えよ。

(1) $a(m, n) = 360$ のとき，$m$，$n$ の値を求めよ。

(2) $a(m, n)$ を $m$，$n$ を用いて表せ。

(3) $c$ を 2 以上の整数とするとき，$m + n = c$ となる $a(m, n)$ の和 $S_c$ を $c$ を用いて表せ。

〔福岡教育大〕