47 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA，OB，OC 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおく。ただし $0 < p < 1$，$0 < q < 1$，$0 < r < 1$ とする。

2 直線 PQ，AB は点 X で交わり，2 直線 QR，BC は点 Y で交わり，2 直線 RP，AC は点 Z で交わるとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とおいて，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と p，q，r を用いて表せ。

(2) 3 点 X，Y，Z は同一直線上にあることを示し，2 つの線分 XY，YZ の長さの比を p，q，r を用いて表せ。

(3) $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{3}{4}$ のとき，3 点 X，Y，Z を通る直線と直線 PX が直交するように定数 r の値を定めよ。

〔宮城教育大〕

(1) $p = q$ とすると PQ // AB となり PQ と AB は交わらないので $p \neq q$ である。

X が PQ 上の点であるとき，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\,p\,\vec{a} + tq\,\vec{b}\ \cdots①$$

とできる。X が AB 上の点であるとき

$$(1-t)\,p + tq = 1 \quad \text{から} \quad (q-p)\,t = 1-p$$

$p - q \neq 0$ から $t = \dfrac{1-p}{q-p}$ を ① に代入し

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{p\,(1-q)}{p-q}\,\vec{a} - \frac{q\,(1-p)}{p-q}\,\vec{b}}$$

同様に

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{q\,(1-r)}{q-r}\,\vec{b} - \frac{r\,(1-q)}{q-r}\,\vec{c}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{r\,(1-p)}{r-p}\,\vec{c} - \frac{p\,(1-r)}{r-p}\,\vec{a}}$$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{XY}} &= \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OX}}\\ &= -\frac{p\,(1-q)}{p-q}\,\vec{a} + \left\{\frac{q\,(1-r)}{q-r} + \frac{q\,(1-p)}{p-q}\right\}\vec{b}\\ &\qquad - \frac{r\,(1-q)}{q-r}\,\vec{c}\ \cdots②\end{aligned}$$

ここで $\vec{b}$ の係数部をさらに計算するために

$$\frac{\beta\,(1-\gamma)}{\beta-\gamma} + \frac{\beta\,(1-\alpha)}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\beta\{(1-\gamma)(\alpha-\beta)+(1-\alpha)(\beta-\gamma)\}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\beta\{(1-\gamma)\,\alpha-(1-\gamma)\,\beta+(1-\alpha)\,\beta-(1-\alpha)\,\gamma\}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$$

◀ β の 1 次式として整理する準備

$$= \frac{\beta\{(\gamma-\alpha)\,\beta+\alpha-\gamma\}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\beta\,(\alpha-\gamma)(1-\beta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} \cdots ③$$

③ で $(\alpha,\,\beta,\,\gamma)=(p,\,q,\,r)$ とすると ② は

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}} = -\frac{p\,(1-q)}{p-q}\,\vec{a} + \frac{q\,(p-r)(1-q)}{(q-r)(p-q)}\,\vec{b} - \frac{r\,(1-q)}{q-r}\,\vec{c} \cdots ④$$

とできる。

$\overrightarrow{\mathrm{YZ}}$ についても

$$\overrightarrow{\mathrm{YZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OZ}} - \overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

$$= -\frac{p\,(1-r)}{r-p}\,\vec{a} + \left\{\frac{r\,(1-p)}{r-p} + \frac{r\,(1-q)}{q-r}\right\}\vec{c} - \frac{q\,(1-r)}{q-r}\,\vec{b}$$

$$= -\frac{p\,(1-r)}{r-p}\,\vec{a} - \frac{q\,(1-r)}{q-r}\,\vec{b} + \frac{r\,(q-p)(1-r)}{(r-p)(q-r)}\,\vec{c} \cdots ⑤$$

◀ ③ で $(\alpha,\,\beta,\,\gamma)=(q,\,r,\,p)$ とした

④，⑤ から $\dfrac{(1-r)(p-q)}{(1-q)(r-p)}\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \overrightarrow{\mathrm{YZ}}$ が成り立つので，
3 点 X，Y，Z は一直線上にあることが示された。

また $|(1-r)(p-q)\,\overrightarrow{\mathrm{XY}}| = \left|(1-q)(r-p)\,\overrightarrow{\mathrm{YZ}}\right|$

$$|(1-r)(p-q)|\left|\overrightarrow{\mathrm{XY}}\right| = |(1-q)(r-p)|\left|\overrightarrow{\mathrm{YZ}}\right| \quad \text{から}$$

$$\mathrm{XY}:\mathrm{YZ} = \left|\overrightarrow{\mathrm{XY}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{YZ}}\right|$$

$$= \boldsymbol{|(1-q)(r-p)|:|(1-r)(p-q)|}$$

(3) $\left|\vec{a}\right| = \vec{b} = \left|\vec{c}\right| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\times1\times\cos60^\circ = \dfrac{1}{2}$
を準備して，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{3}{4}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\,\vec{a} - \frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\,\vec{b} = -\frac{1}{2}\,\vec{a} + \frac{3}{2}\,\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{r\left(1-\frac{1}{2}\right)}{r-\frac{1}{2}}\,\vec{c} - \frac{\frac{1}{2}\,(1-r)}{r-\frac{1}{2}}\,\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2r-1}\,\{r\,\vec{c} + (r-1)\,\vec{a}\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\,(3\,\vec{b} - 2\,\vec{a}) \cdots ⑥$$

◀ 方向を表すだけなら $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ の代わりに $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ でもよい

$\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{OZ}} - \overrightarrow{\mathrm{OX}}$

$= \dfrac{1}{2(2r-1)}\left(2r\vec{c} + 2(r-1)\vec{a} - (3(2r-1)\vec{b} - (2r-1)\vec{a})\right)$

$= \dfrac{1}{2(2r-1)}\left((4r-3)\vec{a} - 3(2r-1)\vec{b} + 2r\vec{c}\right) \cdots$ ⑦

PX $\perp$ XZ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XZ}} = 0$ であり，⑥，⑦ から

$(3\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot ((4r-3)\vec{a} - 3(2r-1)\vec{b} + 2r\vec{c}) = 0$

◀ 予め両辺を $4(2r-1)$ 倍した

$\dfrac{3}{2}(4r-3) - 9(2r-1) + 3r - 2(4r-3) + 3(2r-1) - 2r = 0$

$-13r + \dfrac{15}{2} = 0$　から $\boldsymbol{r = \dfrac{15}{26}}$

48 下の表のように，正の偶数を並べ，上から m 行目，左から n 列目の数を $a(m,n)$ と表すことにする。例えば，$a(3,2)=16$ である。

2	6	12	20	30	⋯
4	10	18	28	⋯	⋯
8	16	26	⋯	⋯	⋯
14	24	⋯	⋯	⋯	⋯
22	34	⋯	⋯	⋯	⋯
32	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

次の問に答えよ。

(1) $a(m,n)=360$ のとき，m，n の値を求めよ。

(2) $a(m,n)$ を m，n を用いて表せ。

(3) c を 2 以上の整数とするとき，$m+n=c$ となる $a(m,n)$ の和 S_c を c を用いて表せ。

〔福岡教育大〕

$a(m,n)$ を $m+n$ が小さい方から，$m+n$ が等しい場合は n が小さい方から並べ，$m+n=k$ となるものが第 $k-1$ 群に属すると考える。すなわち次のような数列となる。

$$\underset{\text{第 1 群}}{2} \;\Big|\; \underset{\text{第 2 群}}{4,\ 6} \;\Big|\; \underset{\text{第 3 群}}{8,\ 10,\ 12} \;\Big|\; 14,\ \cdots$$

(1) 360 は 180 番目の項である。群項数の累計を計算すると

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+18 &= 171 \\ 1+2+3+\cdots+18+19 &= 190 \end{aligned}$$

$m+n \leqq 19$ となる $a(m,n)$ の項の総数が 171，$m+n \leqq 20$ となる $a(m,n)$ の項の総数が 190 なので 180 番目の項は

$m+n=20$ である 9 番目の項であるから $a(11,9)$

すなわち $\boldsymbol{(m,n)=(11,9)}$

(2) (1) の考察から $a(m,n)$ は

$$1+2+\cdots+(m+n-2)+n=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n$$

番目の項であるから，項の値は

$$\begin{aligned} a(m,n) &= (m+n-2)(m+n-1)+2n \\ &= (m+n-1)^2-(m+n-1)+2n \\ &= \boldsymbol{(m+n-1)^2-m+n+1} \end{aligned}$$

(3) $m+n=c$ となる第 $c-1$ 群は等差数列をなし，

項数は $c-1$，初項は

$$a(c-1,1)=(c-1)^2-(c-1)+1+1=c^2-3c+4$$

であり，末項は

$$a(1,\, c-1) = (c-1)^2 - 1 + (c-1) + 1 = c^2 - c$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{1}{2}(c-1)\{a(c-1,\, 1) + a(1,\, c-1)\} \\ &= \frac{1}{2}(c-1)(2c^2 - 4c + 4) \\ &= \boldsymbol{(c-1)(c^2 - 2c + 2)} \end{aligned}$$