44 曲線 C ： $y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1\,(2, 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 〔熊本大〕

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ である。

$f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5$ より P_1 における接線の方程式は

$$y = 5\,(x - 2) + 2 = 5x - 8$$

P_2 の x 座標 a_2 は $f(x) = 5x - 8$ を解いて

$$x^3 - 2x^2 + x = 5x - 8$$

◀ $x = 2$ が重解となるので

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & -4 & 8 \\ & & 2 & 0 & -8 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$(x - 2)^2\,(x + 2) = 0$$

$a_2 \fallingdotseq 2$ から $a_2 = -2$，$f(-2) = -8 - 8 - 2 = -18$ から

P_2 の座標は $\boldsymbol{(-2\,,\,-18)}$

◀ $y = 5x - 8$ 上の点とする方が計算は楽

(2) ℓ_n は，点 $(a_n\,,\,f(a_n))$ を通り，傾き $f'(a_n)$ の直線から

$$\begin{aligned} y &= (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)\,(x - a_n) + {a_n}^3 - 2{a_n}^2 + a_n \\ &= (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)\,x - 2{a_n}^3 + 2{a_n}^2 \quad \text{より} \end{aligned}$$

ℓ_n の**傾きは $3{a_n}^2 - 4a_n + 1$，y 切片は $-2{a_n}^3 + 2{a_n}^2$**

(3) C と ℓ_n の共有点の x 座標を求める。

$$f(x) = (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)\,x - 2{a_n}^3 + 2{a_n}^2 \quad \text{を解く}$$

$$x^3 - 2x^2 - (3{a_n}^2 - 4a_n)\,x + 2{a_n}^3 - 2{a_n}^2 = 0$$

$$(x - a_n)^2\,(x + 2a_n - 2) = 0$$

◀ $x = a_n$ が重解となることはわかっている

$a_{n+1} \fallingdotseq a_n$ から $a_{n+1} = -2a_n + 2 \cdots$①

① から辺々 $\dfrac{2}{3}$ を引き

◀ 隣接 2 項間漸化式の基本処理

$$a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2a_n + 2 - \frac{2}{3} = -2\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{2}{3}\right\}$ は

初項 $a_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列となるので

$a_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$ すなわち $\boldsymbol{a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}}$

45 次の問いに答えよ。

(1) すべての整数 n に対し，n^4 を 5 で割ったときの余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^4 + y^4 + 2 = z^4$ を満たす整数 x，y，z は存在しないことを示せ。〔岩手大〕

以下合同式の法は 5 とする。

◀ 合同式を用いると計算（解答の記述）が簡潔にできる。

(1) $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2$ について調べればよい。

- $n \equiv 0$ のとき
  $$n^4 \equiv 0$$
- $n \equiv \pm 1$ のとき
  $$n^4 \equiv (\pm 1)^4 \equiv 1$$
- $n \equiv \pm 2$ のとき
  $$n^4 \equiv (\pm 2)^4 \equiv 16 \equiv 1$$

したがって，整数 n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 であることが示された。

(2) (1) の結果から次の 4 通りを調べる。

- $x^4 \equiv 0$ かつ $y^4 \equiv 0$ のとき $x^4 + y^4 + 2 \equiv 2$
- $x^4 \equiv 0$ かつ $y^4 \equiv 1$ のとき $x^4 + y^4 + 2 \equiv 3$
- $x^4 \equiv 1$ かつ $y^4 \equiv 0$ のとき $x^4 + y^4 + 2 \equiv 3$
- $x^4 \equiv 1$ かつ $y^4 \equiv 1$ のとき $x^4 + y^4 + 2 \equiv 4$

いずれも $z^4 \equiv 0, 1$ を満たさない。すなわち条件を満たす整数 x，y，z は存在しないことが示された。

46 実数 x に対して，

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

とおく。

(1) $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。〔北海道〕

(1) $x+\frac{\pi}{6}=\theta$ とする。$x=\theta-\frac{\pi}{6}$ とできて，

$$x+\frac{2}{3}\pi=\theta-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi=\theta+\frac{\pi}{2}\quad から$$

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)&=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\sin^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\boldsymbol{1-t^2}\quad\cdots①$$

同様に

$$2x+\frac{\pi}{3}=2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}=2\theta\quad から$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\boldsymbol{1-2t^2}\quad\cdots②$$

(2) ①，② を用いると $f(x)=0$ は

$$\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)=0$$

$$10t^2-\sqrt{3}t-6=0$$

$$\left(2t-\sqrt{3}\right)\left(5t+2\sqrt{3}\right)=0$$

$$t=\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}\quad\cdots③$$

ここで $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi\cdots④$ であり

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1\quad すなわち\ -\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\cdots⑤$$

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{6.25}=2.5$ から $-\frac{2\sqrt{3}}{5}<-\frac{1}{2}$ となり

③ のうち ⑤ を満たすのは $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のみ

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を ④ の範囲で解くと

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\quad すなわち\ \boldsymbol{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}}$$